ENSAIO SOBRE A GÊNESE DAS IDÉIAS MATEMÁTICAS: EXEMPLOS DA TEORIA DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Tatiana Marins Roque

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Aprovada por :

Prof. Luiz Pinguelli Rosa, Ph.D.

Prof. Ildeu de Castro Moreira, D.Sc.

Prof. Christian Houzel, Docteur d'État

Prof. Jacob Palis Jr., Ph.D.

Prof. Michel Paty, Docteur d'État

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 2001

ROQUE, TATIANA MARINS

Ensaio sobre a Gênese das Idéias Matemáticas : Exemplos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos [Rio de Janeiro] 2001

XI, 263 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Produção, 2001)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. História da Teoria dos Sistemas Dinâmicos

2. Filosofia da Matemática

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

A minha mãe, Tania,
pelo heroísmo de viver
...e ser mulher.

A Claudio Ulpiano,
por me salvar de um mundo sem filosofia
e por tê-lo perfumado, este mundo,
para sempre.

"Não. Ninguém faz samba só porque prefere,
força nenhuma no mundo interfere
sobre o poder da criação".
(João Nogueira e Paulo César Pinheiro)

Agradecimentos

À CAPES, pela bolsa de doutorado-sanduíche na França durante os anos de 1998 e 1999.

Ao professor Luiz Pinguelli Rosa, pelo apoio e pelo estímulo, institucional e intelectual, que se estenderam por todas as etapas deste trabalho. Pelas conversas de fina inteligência que inspiram, para além do conteúdo, pela alegria de constatar que a Universidade ainda pode ser um lugar de resistência.

Ao professor Ildeu de Castro Moreira, pela ampla visão histórica e pelo contraponto necessário vindo da Física. Mais especificamente, pela leitura precisa do texto final, pelas sugestões ao longo de todo o processo e pelas interessantes discussões de idéias. Por aceitar as diferenças.

Je remercie chaleureusement le professeur Michel Paty, qui était alors directeur de l'Équipe REHSEIS, de m'avoir accueillie au sein de l'Équipe. Les séminaires et conférences auxquelles il m'a invité à participer ainsi que les riches discussions que j'ai eues avec lui m'ont à la fois donné le goût et introduit à l'Histoire des sciences.

Je remercie le professeur Christian Houzel, pour ses remarques dont il a jalonné la lecture de mon travail et pour la rigueur qu'il a su me communiquer, rigueur qui devient d'autant plus nécessaire dans une recherche qui se place dans le croisement de différentes disciplines.

Ao professor Jacob Palis, pela ênfase nos aspectos históricos e filosóficos ao expor a matemática que ajudou a fundar. Em particular, pela entrevista concedida e por ter aceito fazer parte desta banca.

Ao Programa de Engenharia de produção da COPPE-UFRJ, por ter aceito meu projeto. Agradeço especialmente aos professores Saul Fuks e Carlos Alberto Nunes Cossenza; e também a Roberto dos Santos Bartholo. Agradeço ainda à Área Interdisciplinar de Pós-graduação em História da Ciência e das Técnicas e Epistemologia da COPPE-UFRJ.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ, pelo apoio institucional e pela possibilidade de trabalhar em uma área que não é estritamente matemática. Agradeço especialmente, por motivos diversos, à Ângela Rocha, à Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, ao Waldecir Biachinni e ao Ricardo Kubrusly.

Je remercie l'Équipe REHSEIS qui m'a reçue comme membre et m'a offert la possibilité d'exposer et de discuter de ma recherche. Je détacherai les noms des chercheurs qui ont eu une influence plus directe sur mon travail: Karine Chemla, Dominique Flament, Christian Gilain, Irène Passeron, Jean-Jacques Scezinarcz, Christiane Vilain e Martin Zerner, qu'ils soient tous ici chaleureusement remercié. Je remercie Cathérine Harcour pour m'avoir si gentillement accompagné dans toutes les demarches administratives. Parmis les personnes de l'Équipe qui j'ai pu rencontrer, me reste encore un intense souvenir de Gilles Châtelet.

Ao IMPA, pelas disciplinas cursadas e pelos congressos que participaram intensamente da formação necessária à escritura desta tese. Agradeço em particular aos professores Maurício Peixoto e Marcelo Viana pelas entrevistas concedidas.

Je remercie tous les intervenants aux journées "Épistémologie des systèmes dynamiques", spécialement ceux qui m'ont donné l'occasion de discuter de mon travail. Les mathématiciens: Daniel Bennequin, Marc Chaperon, Alain Chenciner et Joel Merker. Les historiens des sciences: David Aubin et Amy-Dahan Dalmedico.

Je remercie Sara Franceschelli, qui j'ai connue à l'Équipe REHSEIS, pour tout ce que j'ai appris avec elle sur la physique du chaos et pour la richesse de notre travail ensemble, qui ne s'épuise pas dans ses résultats. Au-delà du travail, je tiens à la remercier pour son amitié et nos échanges poétiques, qui m'ont soutenu tout au long de mon séjour en France.

A Luiz Carlos Guimarães, por me salvar da Informática. Por ter me despertado para a matemática e me fornecido os meios para seguir neste caminho, desde a graduação, passando pelo mestrado. Em particular, pela leitura de grande parte desta tese.

Vários amigos leram partes desta tese. Agradeço a todos pelas observações e por muito mais. Em se tratando de pessoas tão especiais, passo a enumerá-los em ordem alfabética:

Ao Vitor, pela alegria quotidiana de se ser como se é, ou não;
Ao Ro(naldo), por tornar um arco-íris algo que não passaria de "um dia frio em um bom lugar pra ler um livro";
Ao Enrique, pela força, sempre, seja qual for o caminho;
Ao Aubin, pelas ótimas sugestões, e por apimentar a vida no Rio de Janeiro!

Às Anas: Ana Kiffer, pelas arrebatadoras interseções; Ana Monteiro, pela política da vida compartilhada; e Ana Barros, pelo *e* no lugar do *ou*, pela maravilhosa *demeure*.

À Silvia Ulpiano, pela conjugação de espírito, que torna o *agora* igual ao *todo sempre*.

À Vera Vital Brasil, pelos afectos tornados...presentes. Ao Projeto Clínico-Grupal Tortura Nunca Mais.

À Carolzinha linda, à Lauren-flower, ao meu tio Cilão, a José Regio, pelo carinho carioca. A Terezinha e Michel; e ao Miguel, por este mesmo carinho em Paris. À Nadia Douek e à Samy, per il dificile caldo parigino: wahshani!

Ao meu avô Humberto, por se opor sempre à facilidade do senso comum.

Ao meu pai Fefé, por ter sido um pai de verdade.

Ao meu pai Lincoln, pela eterna inspiração e pela *resistência*.

À minha avó Augusta, por aguentar firme, pela lição de vida.

À minha avó Célia, pela eterna proteção: meu anjo da guarda.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science(D. Sc.).

AN ESSAY ON THE GENESIS OF MATHEMATICAL IDEAS: SOME EXAMPLES FROM DYNAMICAL SYSTEMS THEORY

Tatiana Marins Roque

August/2001

Advisors: Luiz Pinguelli Rosa
Ildeu de Castro Moreira

Department: Production Engineering

This work presents the evolution of some notions from Dynamical Systems Theory from the time of Henri Poincaré up to now. It emphasizes the mathematical problems in which these notions were introduced, trying to identify the genesis of the new ideas as well as to stand out their immediate repercussions. Moreover, it discusses the nature of those ideas that appear indistinctly as free mind inventions and as necessities of mathematical development.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.).

ENSAIO SOBRE A GÊNESE DAS IDÉIAS MATEMÁTICAS: EXEMPLOS DA TEORIA DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Tatiana Marins Roque

Agosto/2001

Orientadores: Luiz Pinguelli Rosa
Ildeu de Castro Moreira

Programa: Engenharia de Produção

Este trabalho mostra a evolução de algumas noções da Teoria dos Sistemas Dinâmicos desde o tempo de Henri Poincaré até os dias atuais. Enfatiza os problemas matemáticos em que estas noções foram introduzidas, procurando identificar os momentos de gênese das novas idéias e ressaltar as suas repercussões imediatas. Além disso, discute a natureza dessas idéias que aparecem, ao mesmo tempo, como livres criações do espírito e como necessidades incontornáveis do desenvolvimento da matemática.

Conteúdo

INTRODUÇÃO

"Desde que os princípios do Cálculo Infinitesimal foram estabelecidos, o analista se encontrou diante de três problemas:

Resolução das equações algébricas;

Integração das diferenciais algébricas;

Integração das equações diferenciais"[1].

Com este enunciado, Henri Poincaré inicia a análise de seus trabalhos sobre as equações diferenciais, observando que a história destes três problemas havia sido a mesma, até aquele momento. Mas o próprio Poincaré irá enfocar o terceiro problema a partir de um novo ponto de vista, qualitativo.

O primeiro trabalho, completamente inspirado por esta abordagem, publicado por este brilhante matemático francês, chama-se "*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*". A presente tese trata predominantemente desta memória, publicada em quatro partes entre 1881 e 1886: (POINCARÉ, 1881), (POINCARÉ, 1882), (POINCARÉ, 1885a) e (POINCARÉ, 1886a), e que é conhecida por estar na origem da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Partimos dos problemas matemáticos contidos nesta obra, para acompanhar seus desdobramentos, que constituem um momento de gênese das idéias matemáticas e que irão compor uma nova teoria. Nosso objetivo maior, nesta tese, é o de mostrar, no exemplo do desenvolvimento recente de uma teoria matemática, que as matemáticas não se compõem apenas da teoria matemática.

Adotamos, em princípio, uma exposição histórica, por nos possibilitar entrever uma idéia no instante em que ela surge, quando ainda não está imersa em um sistema lógico. As sinuosidades do pensamento matemático se escondem, muitas vezes, por detrás da exposição lógica. Mesmo que a síntese lógica seja, obviamente, um instrumento potente no desenvolvimento de uma teoria, ela não deixa de ser perversa se aspiramos à compreensão da natureza das idéias que constituem esta teoria.

A apreensão do sentido de uma teoria matemática exige que se reverta o que Federigo Enriques descrevia como:

[1] "*Dès que les principes du Calcul Infinitésimal furent établis, l'analyste se trouva en face de trois probèmes:*
Résolution des équations algébriques;
Intégration des différentielles algébriques;
Intégration des équations différentielles."(POINCARÉ, 1921).

"A idéia de uma ciência racional, logicamente ordenada como teoria dedutiva, que deve aparecer, em cada uma de suas partes, fechada e perfeita; que elimina de si tudo aquilo que lembre o passado obscuro da pesquisa"[2].

Este ideal de sistema não é adequado à matéria que nos ocupa, uma vez que ele pouco esclarece sobre a criação matemática. Se há um ponto de vista inicial que nos inspira é o de que não se deve confundir a matemática *já feita* com a matemática *que se faz*[3]. Mas não nos propomos, tampouco, a tratar dos aspectos subjetivos do pensamento do matemático, ao contrário, é essencial, em nossa abordagem, penetrar antes de tudo no conteúdo da obra.

Como sói acontecer com os objetos matemáticos de um modo geral, os resultados analisados aqui surgem de problemas que podem ser puramente matemáticos, ou inspirados por áreas aplicadas, sobretudo pela física. Ambas as motivações foram explicitamente citadas por Poincaré para justificar os métodos qualitativos.

Tornava-se cada vez mais clara, em sua época, a limitação dos métodos de resolução explicita, e mesmo aproximada, de equações diferenciais. Mas tais dificuldades não o intimidaram, ele prossegue a análise de seus trabalho científicos perguntando:

"Eu diria por isso que o problema é insolúvel? Esta palavra não tem sentido; nós sabemos desde 1882 que a quadratura do círculo é impossível com a régua e o compasso e, no entanto, nós conhecemos π com muito mais decimais do que qualquer construção gráfica poderia fornecer"[4].

Se não pudéssemos resolver uma equação, não saberíamos o que fazer com ela mas Poincaré afirma a utilidade de equações diferenciais que não sabemos resolver. A razão disto, é que o ponto de vista qualitativo implica um novo sentido para a palavra *solução*. Uma solução propriamente qualitativa, que é legitima, segundo o próprio Poincaré, por dois motivos distintos: pela sua utilidade na procura das

[2] "*L'idea di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che deva apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che (...) respinga da sè (...) tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca*" (ENRIQUES, 1929).

[3] Este enunciado foi expresso por Pierre Boutroux logo no princípio de seu livro *L'idéal scientifique des mathématiciens*: "*Il est, en matière de science, un principe qui paraît admis, sinon par tous les philosophes, du moins par la grande majorité des savants: c'est qu' il ne faut pas confondre la science déjà faite avec la science qui se fait*" (BOUTROUX, 1920).

[4] "*Dirai-je pour cela que le problème est insoluble? Ce mot n'a pas de sens; nous savons depuis 1882 que la quadrature du cercle est impossible avec la règle et le compas, et pourtant nous connaissons π avec beaucoup plus de décimales que n'en pourrait donner aucune construction graphique*" (POINCARÉ, 1921, p.1).

soluções usuais e pelo seu interesse próprio.

Para justificar o primeiro destes objetivos, é empregada, freqüentemente, uma comparação com o problema das equações algébricas. Já o segundo ponto de vista é legitimado pelo fato de que as soluções qualitativas podem, em si mesmas, fornecer informações importantes sobre as questões da mecânica celeste.

Como as informações qualitativas podem ajudar na busca de soluções explícitas?

"Assim, por exemplo, para estudar uma equação algébrica, começa-se por procurar, com a ajuda do teorema de Sturm, qual o número de raízes reais: é a parte qualitativa; depois calcula-se o valor numérico destas raízes, o que constitui o estudo quantitativo da equação"[5].

Mas não esqueçamos que as informações qualitativas possuem interesse em si mesmas, pelo modo como podem *resolver* problemas importantes da mecânica celeste, como o problema da estabilidade do sistema solar.

Dividimos então nossa tese em duas partes. Na primeira, partimos dos problemas, por assim dizer, puramente matemáticos, que encontram seus germes no artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Já na segunda parte, partimos do problema da estabilidade, que veremos ser um problema físico-matemático. Irão aparecer, no entanto, mesmo quando usamos inspirações físicas, idéias matemáticas que constituirão uma teoria matemática autônoma.

Quando aplicamos as ferramentas ou os resultados da matemática a outras áreas, como a física, exportamos a impressão de que a matemática se esgota nesta vocação de ser aplicada. Se isto fosse verdade, esgotar-se-ia, ao mesmo tempo, a atividade a qual ela se aplica[6].

As matemáticas se constituem, também, dos fatos matemáticos que se opõem ou que oferecem uma *resistência* ao esquema teórico que tenta abarcá-los e, justamente desta resistência, nasce uma nova teoria matemática. É neste sentido que falaremos de *realidade em matemática*. Questiona-se usualmente a relação entre a matemática

[5] "Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles : c'est la partie qualitative ; puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation". Esta frase se encontra tanto no artigo de que tratamos nesta tese quanto na análise de Poincaré sobre seus resultados científicos(POINCARÉ, 1921, p.22).

[6] Quando falamos, por exemplo, de um *modelo* matemático, estamos negando a física. Fazendo com que sua única possibilidade recaia sobre a matemática que a *modela*.

e a realidade, como quando se pergunta, por exemplo, qual a aplicação de uma certa teoria. Neste caso, a realidade é a realidade sensível. E a matemática? Como se cria e se inventa a si mesma independentemente da realidade do mundo sensível? Será preciso decalcar a realidade da matemática sobre a realidade sensível?

Pensamos que não. Tal é a motivação filosófica de nossa tese. Falaremos dos dramas vividos pela Teoria dos Sistemas Dinâmicos durante sua invenção. Das tensões experimentadas por cada novo conceito que aparecia na tentativa de dar conta das exceções, dos problemas que insistem.

A primeira parte é composta de cinco capítulos:

O capítulo 1 dedica-se ao estatuto das equações diferenciais ou, melhor dizendo, ao estatuto das suas soluções, antes e depois de Poincaré. Como este trabalho concerne à análise qualitativa das equações diferenciais, é natural começar por perguntar como este ponto de vista transforma a natureza destes objetos matemáticos.

Centrar-nos-emos, em seguida, sobre problemas específicos do artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*".

No capítulo 2, descreveremos o problema da linearização local desde a tese de Poincaré, passando pelos casos de linearização diferenciável, até a introdução da topologia e o teorema de Grobman-Hartman.

No capítulo 3, falaremos brevemente de alguns outros problemas e métodos do mesmo artigo que caminham em direção a resultados globais. Por exemplo, o teorema de Poincaré-Bendixson e o estudo do toro.

No capítulo 4, mencionaremos um dos procedimentos mais importantes que se fundam com Poincaré, que nos permitem entrever a inextricável complexidade do aspecto global das soluções de uma equação diferencial: as seções de Poincaré.

Encerraremos a primeira parte com o capítulo 5, que trará algumas conclusões fortemente inspiradas nas obras filosóficas de Jean Cavaillès e Albert Lautman.

Inicia-se, então, a segunda parte, dedicada ao problema da estabilidade:

No capítulo 6, procuraremos localizar historicamente, de modo resumido, a questão da estabilidade do sistema solar antes de Poincaré. Mencionaremos a presença deste problema desde o princípio da matematização dos fenômenos evolutivos da natureza, mais especificamente, da mecânica celeste, e tentaremos identificar, nestas teorias científicas, a importância e os significados da estabilidade.

As técnicas inventadas, no século XVIII, pelos gênios da análise matemática serão consideravelmente aperfeiçoadas no século XIX, mas será necessário esperar até o fim deste século para que Henri Poincaré traga uma nova luz sobre o problema da estabilidade.

No capítulo 7, então, iremos introduzir a visão de Poincaré sobre este problema, bem como a de alguns de seus contemporâneos, como Lyapunov, ou de seus herdeiros, como Birkhoff.

O capítulo 8 era, a princípio, o assunto central de nossa tese. A tentativa de chegar até ele nos levou a fazer uma outra tese. Por esta razão, este capítulo é muito mais resumido do que gostaríamos e pretendemos, no futuro, prosseguir nosso trabalho a partir deste ponto. Nele falaremos de alguns conceitos fundamentais da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, do modo como ela passou a ser constituída na segunda metade do século XX. Acrescentamos um resumo, muito breve, dos problemas atuais desta teoria.

Terminaremos à guisa de conclusões, abrindo novas questões mais do que concluindo uma análise.

As traduções encontradas no texto, quando não mencionadas as fontes, são de nossa autoria. Citaremos também o original, sempre que necessário. Em algumas ocasiões, utilizaremos trechos em francês, por acreditarmos que a tradução não seria fundamental.

Parte I

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Capítulo 1

O que significa *resolver* uma equação diferencial?

A analogia com a teoria das equações algébricas tem uma influência inegável nas próprias técnicas utilizados por Poincaré, quando se volta para as propriedades qualitativas do conjunto de soluções de uma equação diferencial. Hadamard já havia mencionado este fato, em sua análise da obra de Poincaré:

"Se encontra aqui uma circunstância que já havia aparecido em outros capítulos da história da matemática.

É assim que, na resolução algébrica das equações, houve um primeiro período em que a atenção se voltou para a procura de uma raíz determinada da equação proposta. Mas esta teoria só passou de um estado, de certa maneira, empírico ao estado de perfeição lógica ao qual levaram-na Lagrange, Ruffini, Abel, Cauchy, Galois, quando decidiu-se, ao contrário, considerar simultaneamente todas as raízes procuradas"[1].

Sabemos hoje em dia o estado de perfeição que a teoria das equações algébricas atingiu, principalmente, com o trabalho de Galois. Este construiu uma teoria geral das equações algébricas onde a estrutura algébrica do conjunto de soluções é descrita em primeiro lugar. A solubilidade da equação por radicais depende desta estrutura que nos permite também encontrar um algoritmo para resolver a equação, mesmo que a teoria trate sobretudo da estrutura geral do conjunto de soluções que da resolução

[1] "*Ici se trouve une circonstance qui était déjà apparue dans d' autres chapitres de l'histoire des mathématiques.*

C'est ainsi que, dans la résolution algébrique des équations, il y eut une premiàre période où l'on porta son attention sur la recherche d'une racine déterminée de l'équation proposée. Mais cette théorie ne passa d'un état en quelque sorte empirique à l'état de perfection logique où l'amenèrent Lagrange, Ruffini, Abel, Cauchy, Galois que lorsque l'on décida, au contraire, à envisager simultanément toutes les racines cherchées"(HADAMARD, 1912b).

de casos específicos.

Poincaré não cita Galois. Na menção que transcrevemos na introdução, vimos o nome de Sturm[2]. Todavia, a comparação com o ponto de vista global sobre as soluções de uma equaçãoalgébrica, insiste em seus trabalhos. É bastante esclarecedor o texto abaixo, onde vemos o alcance de seu ponto de vista qualitativo sobre a integração de equações diferenciais. Os novos métodos permitirão a descoberta de novas soluções, nunca antes concebidas pelos métodos tradicionais:

"O número de equações integráveis por quadraturas é extremamente restrito e, enquanto não se decidiu estudar as propriedades das integrais em si mesmas, todo este domínio analítico foi apenas uma vasta *terra incognita* que parecia, para sempre, interdita ao geômetra"[3].

Notamos, a título de precisão, que há uma diferença essencial entre o problema de resolução das equações algébricas e de integração das equações diferenciais. No primeiro, precisamos saber quando as equações possuem solução, enquanto no segundo queremos saber quando as equações são integráveis. A existência das soluções é garantida, assumindo-se certas condições, pelo teorema de existência e unicidade, de que falaremos brevemente neste capítulo. Mesmo assim, isto não quer dizer, nem de longe, que saibamos encontrar as soluções explícitas. Ainda que Poincaré muito tenha contribuído aos métodos tradicionais de solução, sua maior inovação é a de se voltar para a pergunta e questionar os casos de resposta: o que significa *resolver* uma equação diferencial?

[2]Sobre a relação entre os métodos de Poincaré e os de Sturm ver o artigo de Christian Gilain(GILAIN, 1991).

[3]"*Le nombre des équations intégrables par quadratures est extrêmement restreint, et tant qu'on ne s'est pas décidé à étudier les propriétés des intégrales en elles-mêmes, tout ce domaine analytique n'a été qu'une vaste* **terra incognita** *qui semblait à jamais interdite au géomètre*"(POINCARÉ, 1921, p.ii).

1.1 Antes de Poincaré

1.1.1 Equações diferenciais e funções

"O problema geral pode ser assim formulado: dada a relação entre duas funções, encontrar a curva. (...) Chamo função um segmento de reta determinável exclusivamente a partir de retas traçadas entre um ponto fixo e um ponto dado da curva..."(LEIBNIZ, 1694).

Leibniz define assim o objetivo de um de seus mais importantes artigos, um dos fundadores do cálculo infinitesimal. O interessante aqui é que se trata já do problema que ele próprio denominava: inversão de tangentes; isto é, dado um conjunto de retas, consideradas tangentes, encontrar a curva. Introduz-se neste problema a palavra *função* como no trecho citado. Diferentemente da definição atual, Leibniz chamava função a um segmento de reta que exercesse, em relação à curva procurada, uma função: tangente, normal, abscissa, ordenada. Na verdade, o problema tratado por Leibniz no artigo é bem mais geral. Não somente os dados do problema podem ser segmentos de reta em posições gerais, não necessariamente tangentes, mas podem ser curvas. Trata-se em linguagem moderna de um problema de envoltória, do qual nos interessa em especial, assim como a Leibniz, o caso particular: dada uma família de retas em determinada relação, encontrar a curva que lhes é tangente. O que vem a ser o mesmo que resolver uma equação diferencial de primeira ordem, de modo audacioso para a época, sem apelar para a busca de quadraturas, como escreve Leibniz ao Marquês de L'Hospital: "Se eu pudesse reduzir vice-versa os inversos de tangentes a este problema, teria uma nova maneira de construí-los independentemente de quadraturas"[4].

O problema que nos concerne nesta tese é o modo de como *resolvemos* equações diferenciais sem apelar para a busca de quadraturas. Se grifamos o verbo *resolver* é exatamente porque podemos atribuir diferentes sentidos a esta palavra, que vão desde os métodos ditos de "quadraturas", equivalente à busca de primitivas, até os métodos qualitativos inventados por Poincaré e que constituem o objeto central de nossa tese.

Como subentendemos do texto de Leibniz, as equações diferenciais exprimem

[4] "Si je pouvais réduire vice versa les inverses des tangents à ce problème j'aurais une nouvelle manière de les construire indépendamment des quadratures"(LEIBNIZ, 1850-1863, p.288).

relações entre quantidades infinitesimais como uma função destas variáveis. Não entraremos na famosa discussão sobre o pontos de vista de Leibniz, mas afirmaremos que são estas relações elementares que indicam a natureza intrínseca de um problema, ou de um fenômeno, que desejamos analisar. Poincaré mesmo afirmava que é o conhecimento do fato elementar que nos permite escrever o problema como uma equação da qual deduzimos o fato observável por integração(POINCARÉ, 1900, p.1168). O fato elementar é justamente uma relação íntima entre os elementos do problema, que possui uma certa realidade e, "se as equações permanecem verdadeiras, é porque estas relações conservam suas realidades". Deixaremos de lado estas considerações, por enquanto, para retomá-las mais tarde, guardando a definição operacional de uma equação diferencial como a associação entre uma relação diferencial e uma função das variáveis que compõem uma tal relação, para estudar os diferentes modos como pode ser entendida uma *solução* desta equação.

Nos nossos dias, uma função é definida como uma relação particular não ambígua entre todos os elementos de um conjunto e elementos de um outro conjunto. Nos problemas unidimensionais, tratados em primeiro lugar, uma função é um mapa que associa uma variável independente a uma variável dependente mas esta última idéia é totalmente ausente dos modos como uma função era anteriormente concebida. Mesmo que o conceito de função empregado por Leibniz seja ainda muito diferente de sua conotação atual, ele guarda a idéia geométrica de uma relação entre variáveis, termo que compreende toda e qualquer grandeza associada a uma curva. Mesmo a diferencial, no cálculo leibniziano, é uma variável que pode, portanto, ser diferenciada, gerando diferenciais de ordens superiores. Chamamos atenção, como no artigo de H.J.M. Bos (BOS, 1974), para o fato de que poucos historiadores da ciência notaram que as diferenciais quase nunca aparecem sozinhas nos escritos de Leibniz; mas são variáveis que dependem de outras variáveis do problema, dependência esta que é estudada por equações diferenciais. Bos, mais interessado no entendimento do pensamento de Leibniz que na crítica do "infinitamente pequeno", exprime um ponto de vista que compartilhamos sobre o cálculo leibniziano: "A curva incorpora relações entre variáveis relevantes. Como as variáveis finitas, as diferenciais encerram relações umas com as outras que são induzidas pela curva. As equações que expressam essas relações são equações diferenciais"[5]. Isto é, o mais importante para Leibniz é a relação diferencial intrínseca a um certo objeto geométrico e não a diferencial tomada individualmente.

Não nos interessa neste momento entrar nos detalhes relativos à evolução do conceito de função, mas apenas salientar que, desde este momento do nascimento do cálculo infinitesimal, quando o nome *função* foi introduzido por Leibniz, esta noção esteve associada, geometricamente, ao problema de se resolver as equações diferenciais. Problema do qual Leibniz intuía a dificuldade, mesmo que Newton tenha dito, sob forma de anagrama, que sabia integrar todas as equações diferenciais[6]. Aproximaremos, neste primeiro capítulo, os aspectos históricos da resolução das equações diferenciais da história do próprio conceito de função.

Será apenas com Euler, no século XVIII, que a noção de função começará a ser precisada, de modo algébrico, sem menção a seu caráter geométrico[7]. Em seu texto de exposição das preliminares do cálculo infinitesimal, *Introductio in Analysis Infinitorum*, Euler define uma função como: "Uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer desta quantidade variável e de números ou de quantidades constantes"[8]. Além das funções definidas deste modo, chamadas "funções contínuas", Euler irá admitir também a possibilidade de uma função ser definida por uma regra arbitrária. O que Euler chamava uma *função contínua* denominamos hoje *função analítica*, sendo a continuidade relativa a uma propriedade distinta. Voltaremos a falar sobre esta definição. Fato é que, com as definições algébricas empregadas por Euler e a possibilidade de se manipular algebricamente as expressões infinitas e os infinitamente pequenos de modo seguro, não haverá mais necessidade de se apoiar o cálculo infinitesimal sobre considerações metafísicas relativas ao infinito:

---

[5] "*The curve embodies relations between the relevant variables. Like the finite variables, the differentials bear relations to each other induced by the curve. The equations which express these relations are the differential equations*"(BOS, 1974, p.28).

[6] "*Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*". Há controvérsias sobre o significado do enunciado que poderia significar também "é útil resolver as equações diferenciais", como encontramos no prefácio do livro de V.I. Arnold(ARNOLD, 1980).

[7] Em toda a continuação deste parágrafo foi utilizado como referência o artigo de Christian Houzel, *Euler et l'apparition du formalisme*(HOUZEL, 1979).

[8] "*Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeris quantitatibus constantibus*"(HOUZEL, 1979, p.131).

"A matemática toma assim uma nova orientação, que podemos qualificar de formalista; a ideologia subjacente, que substitui a metafísica do infinito, é ainda mais difícil de se revelar e de se analisar uma vez que ela funciona ainda na matemática de hoje"[9].

Gostaríamos de dizer ainda algumas palavras sobre Lagrange, cujo trabalho tornará a função derivada objeto central do cálculo, no lugar das diferenciais[10]. Contra qualquer remanescente metafísico no cálculo infinitesimal este autor irá propor sua teoria das funções analíticas[11]; mesmo aqueles traços que restavam em Euler, as chamadas quantidades evanescentes, devem ser banidos:

"É então mais natural e mais simples considerar imediatamente o desenvolvimento de funções sem empregar o circuito metafísico dos infinitamente pequenos ou dos limites; e significa trazer o cálculo diferencial a uma origem puramente algébrica, fazê-lo depender unicamente de tal desenvolvimento.

Em uma palavra, para tirar todas as dúvidas e dissipar todas as nuvens, é preciso nada fazer esvanecer; e a consideração das funções derivadas fornece os meios para tal"[12].

Lagrange ressalta assim o caráter algébrico da noção de função a partir do qual irá definir as funções derivadas, $f', f'', f''', ...$, conforme notação introduzida pelo próprio. Uma limitação de seu cálculo é, no entanto, o repúdio à noção de limite, como podemos constatar pelo trecho citado. Por se restringir à definição algébrica, Lagrange se limitará às funções analíticas, e a generalidade que caracteriza atualmente o conceito de função só será alcançada bem mais tarde, com a obra inovadora de Riemann. Este

[9] "*Les mathématiques prennent ainsi une nouvelle orientation, que l' on peut qualifier de formaliste; l'idéologie sous-jacente, qui remplace la métaphysique de l'infini, est d'autant plus difficile à révéler et à analyser qu'elle fonctionne encore dans la mathématique d'aujourd'hui*" (HOUZEL, 1979, p.125).

[10] Para um aprofundamento das limitações do cálculo de Leibniz, e mesmo de Euler, em relação ao entendimento da função derivada, sugerimos o já citado artigo de H.J.M. Bos.

[11] Teoria desenvolvida em seu livro *Théorie des fonctions analytiques* (LAGRANGE, 1797), como também em *Leçons sur le calcul des fonctions*. Para análise de tais obras ver (OVAERT, 1979).

[12] "*Il est donc plus naturel et plus simple de considérer immédiatement le développement des fonctions sans employer le circuit métaphysique des infiniments petits ou des limites; et c'est ramener le calcul différentiel à une origine purement algébrique, que de le faire dépendre uniquement de ce développement.*

En un mot, pour lever tous les doutes et dissiper tous les nuages, il faut ne rien faire évanouir; et la considération des fonctions dérivées en fournit le moyen". Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions*, Leçon 1, p. 4, ver (OVAERT, 1979, p.168).

ponto, sobre a teoria analítica, nos interessa em particular, visto que será justamente sobre a redução da matemática e da mecânica aos métodos desta natureza que Poincaré virá operar uma profunda transformação. Em seu belo livro sobre Leibniz, Ivar Ekeland insiste sobre este mesmo ponto ao comentar que, após a geometria se tornar analítica, a mecânica se torna analítica, com Lagrange, e "a palavra *analítica*, neste contexto, indica tudo aquilo que pode ser obtido como resultado de um cálculo. Depois de Descartes, e até Poincaré, o cálculo é soberano"[13].

Uma função tem, em princípio, um caráter operatório, associando grandezas tomadas como variáveis. Gostaríamos de observar que, na evolução do cálculo infinitesimal, a função se torna central como expressão de variações simultâneas que vêm substituir os números como objetos privilegiados da matemática. As funções não serão apenas operações sobre números, tomados como variáveis, mas se tornarão, elas mesmas, objetos sobre os quais podemos definir operações, em particular, aquelas que foram inventadas pelo cálculo infinitesimal. As incógnitas nas equações algébricas são números, que virão a ser determinados pela equação. De modo análogo, a incógnita em uma equação pode ser uma função. Como no caso de uma equação diferencial, onde uma operação de diferenciação associa funções. Tudo para mostrar como o exemplo das equações diferenciais é essencial no entendimento de uma função como objeto.

A função deve se liberar da sua representação analítica, bem como as equações diferenciais dos métodos analíticos. No caso das funções, um passo fundamental foi dado por Riemann. Com ele, a função será pela primeira vez definida independentemente de sua expressão algébrica. Uma função será definida pelos seus modos de existência, justamente através das equações diferenciais às quais elas satisfazem. Voltaremos a falar dos trabalhos de Riemann mas destacaremos, por enquanto, como este ponto de vista estava presente no trabalho de Poincaré. A teoria qualitativa, fundada por Poincaré, entende a função que obteríamos ao resolver uma equação diferencial como um ente geométrico e, no lugar de entendê-la apenas analiticamente, estudará "as curvas definidas por uma equação diferencial"[14].

[13] "*...le mot "analytique", dans ce contexte, indique tout ce qui peut être obtenu comme résultat d'un calcul. Après Descartes, et jusqu'à Poincaré, le calcul est souverain*" (EKELAND, 2000, p.36).

[14] Referência ao artigo de Poincaré "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*".

Em um texto sobre o Cálculo Funcional, Hadamard afirma que esta disciplina viria coroar, mais tarde, a consideração das funcões como objetos fundamentais da matemática em lugar dos números (HADAMARD, 1912a). Mas tal reversão, no ponto de vista do próprio Hadamard, teria como ponto de partida o esforço de solução das equações diferenciais, em particular o novo ponto de vista qualitativo sobre o que significa *resolver* uma equação diferencial. Esta última afirmação, visto o tema deste trabalho, merece ser um pouco mais desenvolvida e começaremos por descrever brevemente o estado de coisas do qual a nova abordagem de Poincaré irá se separar, a saber a preponderância dos métodos analíticos que procuravam resolver uma equação diferencial por séries.

Antes da função ser entendida como uma lei de variação arbitrária, ela foi definida por uma combinação de operações sobre números. Se há uma maneira de se reduzir a concepção atual à antiga, será a expansão da função em uma série. Sabemos que, para exprimir uma função a partir de uma composição de operações conhecidas, é preciso considerar estas operações em número infinito. Os desenvolvimentos conhecidos, como a série de Taylor, só se aplicam localmente. Daí a pergunta: quando existe uma verdadeira solidariedade entre a função em toda a extensão de seu domínio e as descrições locais que podemos propor? As funções que Euler chamava *contínuas* e que denominamos hoje holomorfas vêm fornecer uma resposta a esta questão[15]. As funções holomorfas chamavam-se "sinéticas", o que indica, desde a origem deste conceito, o quanto ele exprime uma solidariedade entre o local e o global por um procedimento de extensão[16].

O mesmo não ocorre para uma função qualquer. Como disseram Hadamard e Mandelbrojt, "o meio mais simples e mais direto de caracterizar esta última circunstância (a possibilidade de extensão) é a existência do desenvolvimento de Taylor, de modo que, em última análise, a possibilidade deste desenvolvimento é uma definição e não um teorema"[17].

[15]Sabemos que as funções holomorfas fornecem as condições necessárias e suficientes para que possamos desenvolvê-las em séries de Taylor em uma pequena região. Estas regiões podem ser coladas para extender a validade de tal descrição e este é o objetivo dos trabalhos de Weierstrass sobre o prolongamento analítico. Tudo depende de um critério preciso para saber se se trata da mesma função em um círculo qualquer e a série de Taylor fornece este critério.

[16]Esta denominação é mencionada no livro que citaremos em seguida, onde os autores observam que as funções holomorfas eram ditas *synectiques*.

[17]"*...le moyen le plus simple et le plus direct de caractériser cette dernière circonstance est*

A limitação desta representação ao caso real inspirou os primeiros trabalhos de Riemann. Em sua tese de 1851 (RIEMANN, 1851), Riemann propõe um novo modo de se definir uma função no domínio complexo bem como um modo absolutamente original de representá-la geometricamente, introduzindo o que conhecemos hoje como superfície de Riemann. A tese começa assim: "Seja z uma grandeza variável que pode tomar todos os valores reais possíveis, quando a cada um de seus valores corresponde um valor único da grandeza indeterminada w, dizemos que w é função de z". Note-se a idéia de variável independente que se explicita neste enunciado. Riemann continua dizendo, então, que o modo como w depende de z pode ser dado por uma lei matemática de dependência e que a possibilidade de serem determinados todos os valores de z pela mesma lei era atribuída somente às funções holomorfas. Mas as pesquisas de seu tempo fizeram ver que existem procedimentos através dos quais toda função contínua (no sentido atual) pode ser representada por uma expressão analítica em um dado intervalo real. Mas o mesmo não ocorre se a variabilidade de z não se restringe aos reais. E por isso devemos considerar a função de z independentemente de sua expressão. Ele dirá então que "uma grandeza variável w é função de outra grandeza variável complexa z quando aquela varia com esta de tal modo que o valor da derivada $\frac{dw}{dz}$ é independente do valor da diferencial dz"[18]. Uma função define deste modo uma superfície em $\mathbb{C}^2$ e Riemann afirma que, com os princípios introduzidos neste seu trabalho, uma função poderá ser concebida independentemente de termos um método para determiná-la por meio de "operações sobre as grandezas".

Quando falamos das funções analíticas estamos visando os métodos analíticos que reduzem a definição de uma função a isto que Riemann chamou de "operações sobre as grandezas". Daí termos afirmado que a palavra *analítica* indica tudo o que pode ser reduzido ao *cálculo*, que é justamente o procedimento do qual iremos nos distanciar, em equações diferenciais, com a abordagem qualitativa fundada por Poincaré.

Hadamard e Mandelbrojt, na obra que já mencionamos, vêem nos resultados obtidos por Cauchy uma das razões que levaram seus sucessores a considerar apenas

l'existence du développement de Taylor, de sorte que, en dernière analyse, la possibilité de ce développement est une définition et non un théorème"(HADAMARD & MANDELBROJT, 1926, pp.18-19).

[18]Isto equivale ao modo como definimos uma função analítica $w(z)$ que é atualmente uma função que é diferenciável em um ponto e cuja derivada não depende do caminho pelo qual a variável z segue até este ponto.

as funções analíticas. Mas no mesmo trecho onde enunciam esta conclusão histórica, Hadamard e Mandelbrojt demonstram que são profundamente conscientes da complexidade do complementar do mundo analítico e dos rumos futuros da pesquisa nesta área afirmando profeticamente, sobre a limitação da pesquisa ao caso analítico, que:

"Os recentes trabalhos de M.Julia deixam entrever por exemplos, como aquele do problema da iteração, que poderá ser diferente no futuro"[19].

O resultado de Cauchy, que citamos, é o teorema cuja generalização conhecemos hoje por *teorema de existência e unicidade* para as soluções de equações diferenciais ordinárias. No início do século XIX, Cauchy já criticava o uso indiscriminado das séries de potências para resolver equações diferenciais, sem a garantia de que tais séries convergiam e representavam realmente a solução da equação. Isto irá motivá-lo a se debruçar sobre o problema de estabelecer as condições para que uma solução exista, sobre o qual versarão trabalhos fundamentais que mencionaremos brevemente, seguindo o estudo histórico feito por Christian Gilain em sua tese(GILAIN, 1977).

Em 1823, durante seu curso na *École Polytechnique*, Cauchy demonstra, por um método de aproximação por equações de diferenças finitas, que dadas certas condições necessárias pode-se garantir que uma equação diferencial possui uma e apenas uma solução, resultado que seria publicado em 1841 (CAUCHY, 1841a). Este resultado não fornece todavia as condições suficientes para se garantir a existência e unicidade das soluções, e foi preciso esperar para que tais condições fossem estabelecidas por Lipschtz. As condições, conhecidas, portanto, como de Cauchy-Lipschitz, dizem que na equação $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x, y)$ as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ devem ser limitadas e contínuas em um certo retângulo[20].

Mas Cauchy propõe ainda um outro método[21]. O procedimento de Cauchy, que tornou-se clássico nos trabalhos de seus sucessores, constitui o que se chamava *cálculo de limites* e que denominamos hoje *método dos majorantes de Cauchy*. Pela clareza

[19] "*Les récents travaux de M. Julia font entrevoir par des exemples, comme celui du problème de l'itération, qu'il pourra en être autrement dans l'avenir*". O exemplo de Julia é o que chamamos hoje de um *fractal*. Esta citação se encontra na página 28. É curioso observar que o Mandelbrojt em questão vem a ser o tio de Benoit Mandelbrot, cujo nome é freqüentemente associado ao estudo dos objetos fractais.

[20] Já era sugerido que os mesmo métodos podiam ser empregados para sistemas de equações diferenciais.

[21] O artigo de Cauchy citado por Poincaré foi publicado no *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. xiv, p.1020-1023. Ver (CAUCHY, 1841b).

de sua exposição, deixamos a Poincaré a tarefa de descrever o resultado de Cauchy: "ele demonstra que as equações diferenciais ordinárias admitem uma integral; ele define completamente esta integral, ou melhor, um elemento desta integral, mostrando que ela pode se representar, em geral, por uma série ordenada segundo as potências crescentes da variável e convergente dentro de certos limites. É então uma integração completa, mas que não nos faz conhecer o valor que toma a função procurada quando damos a esta variável um valor qualquer, mas somente quando o módulo desta variável é menor que uma quantidade dada"(POINCARÉ, 1879, pp.1-2).

Este *cálculo de limites* difere do primeiro método citado, por se aplicar somente ao caso analítico. Ainda assim, no entanto, foi este método o que teve maior influência na pesquisa de sua época. Tal circunstância não é surpreendente, se lembramos que os problemas de variável complexa mantinham uma primazia absoluta durante quase todo o século XIX, e que a constituição de uma teoria rigorosa sobre as funções analíticas deveria repousar sobre o caso de variáveis complexas.

O problema de se resolver as equações diferenciais, de um modo geral, está contido no modo como Poincaré enuncia o método de Cauchy. Temos um teorema que diz que as soluções existem, mas só sabemos construí-las localmente, na vizinhança de pontos regulares. Sim, porque não dissemos ainda que o resultado de Cauchy não vale para as vizinhanças dos pontos singulares. Estes pontos são, na verdade, singularidades das funções que são soluções da equação[22]. Isto pode acontecer, por exemplo, se as funções que definem os coeficientes da equação são singulares (caso linear) ou de outros modos, no caso geral. Deste ponto partem os trabalhos de Briot e Bouquet, que analisam o que acontece com a demonstração de Cauchy se a função $f(x, y)$, que define a equação diferencial, possui uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Os pontos singulares das funções analíticas foram objeto de pesquisa durante algum tempo, e inspiraram trabalhos de vários autores dos quais citamos, em particular, a teoria desenvolvida por Weierstrass, que relacionava os pontos singulares ao domínio de validade de uma expansão em séries de potências e propunha o método de continuação analítica de uma função para além de seu círculo de convergência.

[22]Os pontos singulares de uma função, neste caso, são os pontos onde ela deixa de estar definida. Para uma visão interessante de outras noções de singularidade, principalmente em Boussinesq, ver (MOREIRA, 1999).

Como não tratamos da teoria de funções em si mesma, mas dos seus aspectos que se relacionam às equações diferenciais, citaremos os estudos desenvolvidos por Poincaré, principalmente em sua tese, para o caso complexo, e o artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*", para o caso real, ambos trabalhos que serão analisados no próximo capítulo.

Mas falávamos antes do resultado de Cauchy. Não apenas eram consideradas somente as funções analíticas, mas o raciocínio analítico foi inicialmente a ferramenta principal no estudo de equações diferenciais, complexas ou reais. O uso do desenvolvimento em séries dominou todo o século XVIII, bem como uma boa parte do século XIX. Da mesma forma que foi feito no estudo de funções, procurava-se reduzir a solução de uma equação diferencial a uma combinação de funções conhecidas, no caso de tal simplificação existir. Apelou-se ainda para a introdução de novos transcendentes para exprimir, do mesmo modo, a solução de certas equações. Outra possibilidade era ainda encontrar uma solução aproximada, utilizando integrais, séries ou métodos numéricos[23]. Poincaré atacou todos estes problemas, trazendo inovações importantes.

Guardando nosso objetivo de chegar até o ponto de vista qualitativo introduzido por Poincaré, apesar de não analisarmos a fundo nenhuma das outras linhas de pesquisa mencionadas, começaremos citando três exemplos de trabalhos do próprio Poincaré com os métodos ditos "tradicionais" que, mesmo não se inserindo no ponto de vista qualitativo, já trazem inovações importantes, que nos ajudam a compreender a amplitude de sua visão, que irá participar profundamente da fundação de uma nova abordagem para o problema.

1.1.2 Alguns tipos de solução

A fim de propor um breve resumo histórico dos modos de se resolver as equações diferenciais, começaremos por citar a equação hipergeométrica, estudada por Gauss em 1812. A importância desta equação reside na possibilidade de se encontrar soluções explícitas por séries de potências. No entanto, tais soluções são dadas apenas localmente por estas séries. Os sucessores de Gauss passaram a investigar as inter-relações globais das mesmas soluções, não apenas para a equação hipergeométrica,

[23]Ver tese de Dominique Tournès

mas para outras equações lineares. Uma série representa uma função localmente e Gauss já era consciente do problema de saber se, continuando-se analiticamente uma função, temos apenas um valor para esta função em cada ponto. Esta questão, que irá ocupar vários matemáticos do século XIX, ficou conhecida como "problema da monodromia", onde o que está em jogo é a continuação analítica de uma solução fora de seu círculo de convergência[24].

As idéias presentes no problema que acabamos de citar serão desenvolvidas de modo particularmente importante por Riemann e Weierstrass, cada um a partir de um ponto de vista independente. Weierstrass é o fundador da teoria da continuação analítica, que tinha como objetivo tornar rigorosa a definição de uma função por série, precisando para isto estendê-la para além de seu círculo de convergência. O interesse deste matemático e de sua escola em Berlim era na verdade o estabelecimento de uma teoria de funções baseada no estudo de séries. Este objetivo difere consideravelmente da abordagem geométrica proposta por Riemann[25]. Para este último, uma função pode ser considerada a partir de certas propriedades que possui. No caso da equação hipergeométrica, por exemplo, ele não partia da equação para analisar seu conjunto de soluções, mas da consideração de funções que poderiam constituir este conjunto de soluções. Podemos adiantar que esta inversão no modo de olhar para o problema não é muito diferente daquela que Poincaré irá propor com sua análise qualitativa.

Mas é para podermos falar de alguns trabalhos de Poincaré, que não se inserem no ponto de vista qualitativo, que continuaremos a falar dos métodos propostos por Riemann. Para maiores detalhes históricos sobre os métodos de resolução das equações diferenciais lineares antes de Poincaré, indicamos o riquíssimo livro de Jeremy Gray(GRAY, 1986). Este historiador da matemática observa que Riemann, exatamente por estar preocupado com as interrelações entre as propriedades locais e globais de uma função, irá procurar imediatamente o número de folhas e os pontos de ramificação das soluções de uma equação diferencial. Para estudar as vizinhanças deste tipo de pontos de uma função algébrica, Riemann (RIEMANN, 1857) irá utilizar o produto de certas matrizes que serão aplicadas na descrição das funções que podem

[24]Cabe ressaltar mais uma vez que nesta época apenas o domínio complexo era considerado.

[25]Na definição de uma função complexa que Riemann propõe em sua tese, ele observa que a variável independente pode estar definida em regiões que cobrem o domínio várias vezes, dando origem a superfícies que contêm múltiplas folhas, ligadas por pontos de ramificação.

ser soluções da equação hipergeométrica. Estas matrizes são na verdade matrizes de monodromia, que indicam o comportamento da continuação analítica das soluções locais por caminhos arbitrários. Estas matrizes não foram inventadas por Riemann, mas é inovador o modo como ele emprega os produtos destas matrizes para descrever as relações de monodromia. O trabalho de Riemann terá fortes influências sobre Jordan, que irá perceber que as matrizes usadas por Riemann geram um grupo que Jordan denomina *grupo de monodromia* em seu célebre *"Traité des substitutions et des équations algébriques"*(JORDAN, 1870(1957)); trabalho onde encontramos uma exposição importante da teoria de Galois[26].

O problema de se resolver equações diferenciais via teoria dos grupos irá nos interessar em especial nesta seção. O método consiste em se considerar todas as transformações de monodromia[27] como um grupo. Neste caso, estas transformações são lineares e o grupo é finito se e somente se as soluções são todas algébricas. O próximo passo será então o de se estudar as equações lineares com coeficientes algébricos. Isto segue dos trabalhos de Fuchs, que foram o ponto de partida das pesquisas de Poincaré em equações diferenciais. Jordan já havia observado que o ponto de vista da teoria dos grupos era adequado para se tratar as questões levantadas por Fuchs, mas este não considera o grupo de transformações. Será na verdade Poincaré o primeiro a explorar toda a potencialidade do ponto de vista de grupos no estudo das soluções de uma equação diferencial.

Fuchs fazia parte do grupo de Berlim, como Weierstrass, e uma observação interessante feita por Jeremy Gray na obra que citamos é que nenhum dos matemáticos que tratamos aqui menciona explicitamente motivações vindas da física ou de qualquer outra aplicação em seus trabalhos que se referem ao tema ao qual nos referimos aqui; mesmo Riemann e Poincaré, que tinham manifesto interesse por problemas físicos expressos em outros trabalhos. Gray propõe uma explicação deste fato, observando que este era exatamente o momento em que surgia uma disciplina, a matemática pura, que, principalmente na Alemanha, contava com pesquisadores pouco interessados em

[26]Do ponto de vista da história da teoria dos grupos é interessante observar que, no mesmo ano da publicação deste tratado (1870), Klein e Lie foram juntos a Paris com o fim de aprender mais sobre esta disciplina com Jordan.

[27]Que transformam uma base de soluções por continuação analítica em todos os caminhos no domínio.

suas aplicações.

Dos trabalhos de Fuchs, mencionaremos somente aqueles que são fundamentais à compreensão dos primeiros artigos de Poincaré. Durante o década de 1870, Fuchs publicou vários artigos sobre a resolução de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes racionais $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dz}^2}+P(z)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+Q(z)y=0$. Esta equação possui uma solução algébrica quando esta solução é raíz de uma equação polinomial irredutível $A_n y^n + A_{n-1}y^{n-1}+...+A_0=0$ onde os A_i são funções racionais de z. É portanto uma questão importante a de saber como as raízes desta equação se relacionam, por exemplo, se o quociente de duas raízes pode ser uma função racional de z. Observamos, fazendo uma pequena digressão, que este exemplo nos possibilita compreender melhor a analogia com a resolução das equações algébricas que é mencionada várias vezes por Poincaré como sendo uma das inspirações da constatação de que seus métodos qualitativos poderiam servir para o entendimento das relações entre diversas soluções obtidas com ferramentas clássicas.

Voltando aos trabalhos de Fuchs, passamos a comentar brevemente os diversos artigos publicados em 1880 e 1881 dos quais nós citamos apenas os escritos em francês: (FUCHS, 1880), (FUCHS, 1881). O objetivo de Fuchs era estudar a equação

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dz}^2}+P(z)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+Q(z)y=0$$

onde P e Q são funções racionais de z e as funções $f(z)$ e $\phi(z)$ formam uma base de soluções desta equação. Conseguia-se encontrar, então, por um método equivalente a inversão de Jacobi, as condições para que $\zeta=\frac{f(z)}{\phi(z)}$ defina z como função de ζ (associando a cada ζ apenas um valor de z).

O que está em jogo nesta questão é um problema equivalente ao que aparece na integração de funções algébricas e que se relaciona à polidromia da integral procurada. Se consideramos esta integral como variável independente, temos que a função inversa é duplamente periódica. Serão estudadas, assim, as funções de uma variável que são duplamente periódicas dentre as quais estão aquelas que são soluções do problema de inversão. No problema considerado por Fuchs, e em seguida por Poincaré, considera-se uma equação diferencial linear com coeficientes algébricos, o que constitui em princípio um problema absolutamente distinto do problema de integração de uma função algébrica. No entanto, na tentativa de se resolver estas equações diferenciais, aparece um tipo de polidromia que será um dos pontos importantes dos trabalhos de Fuchs[28].

Mas, exercendo um papel análogo ao da dupla periodicidade no problema de integração, teremos, para as equações diferenciais, a invariância da função inversa ao quociente de duas soluções independentes sob um certo grupo de transformações. No entanto, o conceito de grupo não é introduzido neste contexto por Fuchs. Este será exatamente a importância do trabalho de Poincaré. Este irá notar não somente que os invariantes correspondem a um certo grupo de substituições lineares, mas que este grupo é caracterizado pela propriedade de ser um grupo descontínuo[29].

Poincaré estava interessado no aspecto global de um caso especial do problema colocado por Fuchs, que vem a ser o de saber quando a inversa do quociente das soluções só fornece um valor para a função em cada ponto. Ele observa então que, dadas certas condições (existem apenas dois pontos singulares finitos), estas funções possuem propriedades interessantes e Poincaré irá denominá-las *funções fuchsianas*.

Mesmo que muito já se tenha falado sobre este assunto, não nos cansamos de admirar esta passagem da história da matemática que concerne à demonstração da existência das funções fuchsianas proposta por Poincaré. Ele começa por conjecturar que estas funções não devem existir e termina por concluir que, não somente elas existem, mas possuem importantes propriedades de invariância que nos permitem definí-las a partir de certas transformações. No meio de uma viagem realizada logo após esta descoberta, Poincaré nos relata que ao subir em um ônibus "no momento em que eu colocava o pé no degrau, a idéia me veio, sem que nada de meus pensamentos anteriores parecesse ter-me preparado, que as transformações que eu havia usado para definir as funções fuchsianas eram idênticas àquelas da geometria não euclidiana"(POINCARÉ, 1908b, p.49).

Quando estes trabalhos são escritos (POINCARÉ, 1880) Poincaré observa explicitamente que estas transformações formam um grupo que define uma geometria (de Lobachevskii) e que as funções fuchsianas são, para esta geometria, o que são as

[28]Observamos, mesmo que não seja possível desenvolver aqui, o papel fundamental de Hermite e Schwarz nas pesquisas sobre este assunto antes de Poincaré.

[29]Isto quer dizer dada a vizinhança de um ponto qualquer, as transformações de um mesmo ponto não podem em geral se acumular nesta vizinhança.

funções duplamente periódicas para a geometria euclidiana. As funções fuchsianas são invariantes de um grupo descontínuo que deixa um círculo fixo chamado *grupo fuchsiano*[30]. Este grupos, sendo estudados em si mesmos, permitiriam também que as funções fuchsianas fossem definidas sem se recorrer às equações diferenciais. Uma observação interessante é que os grupos fuchsianos possuem singularidades que são situadas sobre o círculo fundamental (aquele que é deixado fixo). Sendo em número infinito, estes pontos podem ocupar todo o círculo ou não. Neste segundo caso, os pontos formam um conjunto perfeito descontínuo que, como observou Hadamard (HADAMARD, 1912b), fazem sua primeira aparição, antes de serem reencontrados e formalizados por Cantor anos mais tarde[31].

Tornou-se usual em matemática o procedimento que consiste em agrupar os objetos em famílias definidas a partir de uma certa relação de equivalência. No exemplo que analisamos, quando este modo de abordar o problema se constituía, vimos que as soluções das equações diferenciais lineares são bem compreendidas porque conseguimos agrupá-las em uma mesma família onde "há invariantes que permanecem inalterados" por substituições das quais conhecemos a natureza (POINCARÉ, 1921, p.viii). Tais substituições formam um grupo e soluções deste tipo permitem, nas palavras de Poincaré, "o estudo íntimo da natureza das funções integrais", trazendo um sentido para as séries encontradas para o caso linear, que tanto fazem falta na solução do caso geral por séries. Para as equações lineares, nós agrupamos as funções que são invariantes por uma substituição (mudança de variável) que possui uma propriedade que é interpretada, no grupo de substituições, em termos da descontinuidade do grupo.

Salientamos que este modo de *resolução* do problema faz intervir objetos de um outro domínio— o do grupo de transformações. É fácil ver que se trata de um tipo

[30]Existem diversos trabalhos de Poincaré sobre este assunto dos quais citamos (POINCARE, 1884).

[31]O estudo dos grupos descontínuos foi tema de uma correspondência entre Poincaré e Klein que também estudava estes assuntos, embora não relacionados às equações diferenciais. O estudo de Poincaré se prolongará, então, para grupos descontínuos que não são fuchsianos, isto é, que não deixam um círculo fixo, que (dada uma condição adicional) são chamados grupos Kleinianos. Estes grupos podem ter também linhas singulares que não mais constituirão círculos, mas curvas fechadas. Poincaré observa que tais curvas são contínuas e não possuem tangente em nenhum ponto, indicando um problema matemático onde se fazem presentes as curvas que já haviam sido descritas desde Riemann e Weierstrass como exemplos de comportamentos patológicos isolados.

de solução bem diverso da colagem de vizinhanças que dependia de uma premissa de sineticidade. Nos dois exemplos que iremos citar, as abordagens empregadas também fogem desta premissa. É possível encontrar uma ligação entre ambos os métodos, o que não diminui em nada a afirmação de suas naturezas diversas.

A sineticidade aqui não pode ser suficiente pela própria natureza do problema tratado. Para estudar as curvas definidas por uma equação diferencial em si mesmas, em toda a extensão do plano, Poincaré segue a pista dada pelas equações algébricas e pelas curvas algébricas. Desde que conhecemos as expansões convergentes que exprimem a integral em certas regiões do plano, as propriedades qualitativas podem trazer informações importantes sobre a passagem de uma região, onde há uma certa expansão em série, a uma outra região, onde a expansão é outra. Esta passagem não poderá ser conseqüência de qualquer espécie de sineticidade, uma vez que as equações diferenciais exigem configurações diferenciadas do domínio de uma região a outra. As propriedades qualitativas são o único "guia seguro" para se passar de uma vizinhança a outra.

No mundo das equações diferenciais, não podemos passar de uma região a outra sem mudar a natureza da solução. Trata-se de ir mais longe e saber qual a origem da dissimetria encontrada na possibilidade de síntese do global a partir do local. A genialidade de Poincaré é justamente ter proposto novos métodos que invertem a direção segundo a qual os métodos tradicionais tratavam o problema: trata-se agora de penetrar primeiro no global. Não nos surpreenderá, a partir de então, vermos uma influência recíproca de questões globais em âmbito local, se focalizamos níveis distintos de objetos matemáticos.

Sabemos que a vantagem das funções analíticas é que a extensão de propriedades locais a propriedades globais destas funções mantém os traços fundamentais da função. As palavras de Weierstrass podem nos ajudar a compreender o essencial de uma tal potência sintética: "Quanto mais eu reflito sobre os princípios da teoria das funções— e é o que faço sem parar— mais eu estou solidamente convencido de que eles são erguidos sobre o fundamento das verdades algébricas"[32]. A afirmação de Weierstrass é endereçada a Riemann. Um dos objetivos da teoria de funções de

[32] Carta escrita em 3 de outubro de 1875 a H. A. Schwarz.

Weierstrass é torná-la independente dos métodos de integração complexa, utilizados por Riemann. Ele acusa então este último de ter utilizado *transcendentais* para estabelecer teoremas algébricos simples. Weierstrass reconhece, entretanto, que qualquer caminho é permitido, se ele leva a uma descoberta, e sua crítica concerne apenas ao estabelecimento sistemático da teoria.

Na teoria das funções analíticas, a descrição local e o prolongamento às regiões vizinhas dependem de certas premissas e deixam invariantes certas propriedades da função que são necessárias às premissas. Este conjunto de propriedades de natureza algébrica é o que entendemos por "verdades algébricas". Trata-se ainda, de certo modo, de uma certa sineticidade que, digamos de maneira simplificada, é herdada das funções algébricas, onde a verificação de uma certa condição algébrica para uma infinidade de valores da variável é suficiente para garantir, em toda parte, a validade desta propriedade.

Já dissemos que Riemann procurará tornar a definição de uma função independente de sua expressão analítica. Para isto ele começa por considerar as equações diferenciais que uma função $u + iv = f(x + iy)$ satisfaz. Cada parte, u e v, da função é entendida como um potencial e Riemann irá aplicar os teoremas fundamentais da teoria do potencial. Ele dirá, então, que existe sempre uma função f por meio da qual um domínio simplesmente conexo de xy é representável sobre um domínio simplesmente conexo de uv. Para a representação desta função é introduzida a superfície de que já falamos.

Mas o argumento de Riemann se baseia no princípio que ele batizou de "princípio de Dirichlet", em homenagem a seu mestre. É preciso determinar uma função contínua para a qual uma certa integral dupla deve atingir um mínimo, e a existência de tal função é considerada evidente pelo princípio físico. É justamente contra este ponto que Riemann sofrerá as mais duras críticas, sobretudo de Weierstrass, por ter baseado um resultado matemático sobre um princípio físico. Foi demonstrado, no entanto, mais tarde, que os resultados de Riemann poderiam ser tornados completamente rigorosos.

Não prolongaremos esta discussão, observaremos apenas que, para a análise qualitativa das equações diferenciais, os métodos de Riemann são indispensáveis. Chega a ser surpreendente, como nota também Hadamard(HADAMARD, 1912b), que seja preciso esperar até Poincaré para que os matemáticos se dêem conta de que os métodos fundados por Riemann para resolver um problema de integração devem ser aplicados a todo problema de passagem do local ao global. O que é o caso, em particular, das equações diferenciais.

As verdades algébricas não serão mais suficientes se consideramos o problema geral de resolver equações diferenciais, a não ser em certos casos especiais como das equações diferenciais lineares com coeficientes algébricos. Verdades de outra natureza virão se impor: as verdades topológicas. Os métodos da chamada "geometria de situação", como a topologia era chamada, serão indispensáveis nos artigos de Poincaré sobre a análise qualitativa, bem como na pesquisa que se faz até os nossos dias. Os novos métodos de Poincaré são inspirados diretamente pelos trabalhos de Riemann, em seu estudo geral das funções abelianas a partir da análise qualitativa das funções de uma variável complexa.

A topologia é estreitamente ligada ao problema fundamental do cálculo infinitesimal, sua importância estando "indissoluvelmente ligada a esta passagem do local ao global, que é a grande preocupação do cálculo infinitesimal"(HADAMARD, 1912b). A síntese do comportamento global a partir do local é evidentemente a questão da busca de quadraturas. Mas, para as equações diferenciais, o mesmo método é pouco adequado, principalmente porque as vizinhanças que se prestam à análise local dependem intrinsecamente umas das outras. Daí a necessidade incontornável de não mais considerar cada solução individualmente, mas de se estudar o conjunto de soluções como um todo e suas relações intrínsecas.

Faz parte também, dos métodos da topologia, uma nova visão global sobre os objetos matemáticos. Com os trabalhos de Riemann por exemplo, as curvas algébricas, que tinham anteriormente muitas formas distintas, são reunidas em grandes categorias. Abstraímos as propriedades particulares de uma curva para privilegiar um estudo geral das propriedades comuns a todas as curvas reunidas em uma categoria.

Este será também um novo sentido da palavra *resolver*, associada a uma equação diferencial. Não se trata mais de resolver explicitamente, mas de estudar certas propriedades que podem se espelhar em propriedades de um grupo associado à equação, como nos exemplos que podem transformam o problema de resolução em um problema de classificação.

Não precisamos recorrer necessariamente a um outro nível de objetos. No próprio campo das soluções, deseja-se investigar suas propriedades qualitativas sendo imprescindível compreendê-las, estas soluções, todas ao mesmo tempo. Penetrar no conjunto de soluções para extrair novas informações que, mesmo não sendo explícitas, têm grande valor. O que mais nos importa notar, é que a partir do momento em que encontramos alternativas aos métodos analíticos, *resolver* não será necessariamente *calcular*.

1.2 Com Poincaré

> *"Nous n'essaierons pas, d'autre part, de chercher dans tout l'ensemble de cette oeuvre une unité, d'en dégager une personalité intellectuelle. Cette tentative, qui s'imposerait pour tout autre, serait, à notre sens, chimérique en ce qui concerne Poincaré, et nous croirions diminuer en même temps que dénaturer son oeuvre en nous y essayant".* ("*L'oeuvre mathématique de Poincaré*", (HADAMARD, 1912b))

1.2.1 Dois exemplos de solução

Note-se que todos os trabalhos de Poincaré que citamos nesta seção foram publicados em torno da mesma época, mostrando que o raio da atividade matemática deste autor percorria várias frentes simultaneamente. Por isso não podemos falar de substituição dos métodos qualitativos aos antigos. Veremos, no entanto, que o modo como Poincaré trabalha sobre objetivos clássicos, como o de encontrar séries que representem as soluções, mostra sempre uma abertura para conceber o problema de outro modo. Passemos aos exemplos, que nos ajudarão a compreender o que queremos dizer.

Já falamos do modo como Poincaré emprega as funções fuchsianas para resolver o problema geral das equações diferenciais lineares com coeficientes algébricos. Começa-se assim pelos desenvolvimentos locais das soluções nas vizinhanças das singularidades. Nos trabalhos de Fuchs, os pontos singulares correspondiam ao que chamamos hoje um pólo de ordem finita. As soluções deste tipo— que possuem apenas pólos finitos como pontos singulares— foram denominadas "regulares" por Thomé(THOMÉ, 1873). Este matemático, contemporâneo de Fuchs em Berlim, irá se dedicar então ao estudo das soluções irregulares, isto é, que possuem singularidades essenciais na vizinhança das quais as séries de potências formais não convergem.

Este estudo é bem mais complicado, e será tratado por Poincaré não apenas com um método, mas com um estilo completamente diferente daquele que havia sido utilizado por Thomé. Os artigos que citamos foram publicados em 1885 e 1886, (POINCARÉ, 1885c) e (POINCARÉ, 1886b). A principal novidade da abordagem de Poincaré é a demonstração de que estas séries não convergentes podem fornecer soluções assintóticas da equação. O procedimento usado por Poincaré nestes trabalhos sobre soluções de equações diferenciais na vizinhança de singularidades irregulares pode, portanto, ajudar-nos a entender as ferramentas que podem ter inspirado os métodos qualitativos desenvolvidos simultaneamente em outros trabalhos.

Seja a equação diferencial linear:

$$P_n \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{y}}{\mathrm{dx}^n} + P_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} \mathrm{y}}{\mathrm{dx}^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + P_0 y = 0$$

onde P são polinômios em x. As singularidades a_i desta equação diferencial são as raízes de uma equação algébrica do tipo:

$$A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \ldots + A_1 a + A_0 = 0$$

onde os A são os coeficientes de x^m em P_i.

Poincaré utiliza, nestes trabalhos, a transformada de Laplace da equação linear citada. São postuladas n séries, chamadas *normais*, da forma $e^{a_i x} x^{r_i} \varphi_i$, onde r_i são constantes escolhidas convenientemente e φ_i são séries ordenadas segundo potências negativas de x. Estas séries satisfazem formalmente a equação diferencial, mas são em geral divergentes. Poincaré demonstra que a condição de convergência da série normal, que exprime localmente a solução, é equivalente à existência de uma integral, holomorfa em todo o plano, da transformada de Laplace desta equação diferencial. Podemos observar, apressadamente, que tal problema só é local em aparência e a verificação da existência de tal integral é, no caso geral, um problema tão difícil quanto saber que a série converge.

Baseavam-se sobre este ponto algumas críticas sofridas por Poincaré. L. W. Thomé publicou um artigo (THOMÉ, 1887) onde se nota que suas expectativas visavam o enunciado explícito das condições de convergência das séries normais. Poincaré não nos dá estas condições, mas demonstra que a existência da integral, e portanto a convergência, é ligada a uma propriedade do grupo da equação transformada, também empregada no estudo global das soluções das equações lineares: o grupo fuchsiano. Poincaré responderá a esta crítica afirmando que não é absolutamente inútil, "quando estamos em presença de dois problemas igualmente insolúveis, mostrar que eles podem ser reduzidos um ao outro" (POINCARÉ, 1887). Este ponto de vista nos interessará profundamente na análise do estatuto dos enunciados matemáticos que pretendemos desenvolver mais adiante em nossa tese.

O fato de que ambos os problemas são equivalentes nos indica que a busca de soluções na vizinhança de tais singularidades parece um problema local, mas não é, visto que ele é equivalente à existência de uma integral da transformada de Laplace, que deve ser holomorfa em todo o plano. Se dissermos, porém, que se trata em verdade de um problema global, teremos uma conclusão igualmente insuficiente. A mesma situação, que encontraremos na continuação deste trabalho, anuncia um tipo de raciocínio que nos força a perguntar: qual a ligação entre a estrutura local e a estrutura global das soluções de uma equação diferencial?

Vimos que este problema é simplificado no caso das funções holomorfas, mas em geral o que é local e o que é global não são conceitos previamente estabelecidos, e dependem do exemplo de que tratamos, como procuraremos deixar mais claro nos próximos capítulos.

Restringimo-nos, por enquanto, à pergunta: qual o sentido da palavra *solução* no que tange os processos de resolução desta equação diferencial? Critica-se Poincaré porque seus resultados não *resolvem* o problema, mas se encontra implícita aí uma concepção de que resolver é estabelecer uma série que satisfaça a equação e dar suas condições de convergência. Nosso objetivo aqui é justamente o de mostrar os desvios que Poincaré produz nesta premissa.

Um segundo ponto, ainda sobre o mesmo trabalho de Poincaré, que também foi alvo de críticas, diz respeito a um raciocínio igualmente inovador. Poincaré demonstra que, mesmo que uma série normal divirja, ela pode representar assintoticamente, para x grande, uma integral da equação a qual ela satisfaz formalmente. A análise é feita na vizinhança dos pontos singulares e a cada ponto singular simples corresponde uma integral e uma série normal que a representa assintoticamente. O problema aqui, que é também a novidade da conclusão de Poincaré, é que a cada ponto singular corresponde uma integral que depende do argumento de x, e quando este argumento varia, a integral não permanece a mesma, podendo se transformar bruscamente em uma outra integral, que não é sequer a continuação analítica da primeira. Quanto às séries normais, temos que a um ponto singular corresponde sempre a mesma série normal que, portanto, não irá representar assintoticamente sempre a mesma integral. Thomé critica Poincaré mais uma vez, por ter entendido que a mesma integral seria representada sempre assintoticamente pela mesma série normal.

Citando mais uma vez a resposta de Poincaré, que é, não sem razão, bastante dura, ele prevê o que Thomé pensaria, mesmo se tivesse compreendido: se não podemos determinar explicitamente os valores dos expoentes da série, visto que não temos sempre a mesma série, o trabalho é desprovido de interesse. Ao que Poincaré responde enfaticamente dizendo que tal determinação explícita é impossível e que há interesse em reduzir o problema, como é feito, à determinação do grupo de uma equação linear.

Temos um exemplo claro de um momento inventivo. Diante dos limites dos métodos tradicionais, concebidos como únicas soluções possíveis, Poincaré criará desvios. Mas estes desvios não respondem às mesmas questões, fundando, ao invés disso, novos modos de se conceber uma solução para o problema que vêm, na verdade, responder a uma nova pergunta. Este modo de proceder— inverter a pergunta frente a uma limitação dos métodos disponíveis— será muito característico do estilo da pesquisa de Poincaré, do qual a abordagem qualitativa é o exemplo mais importante. Antes de chegarmos a este assunto, ainda com o intuito de enfatizar o ponto de vista de Poincaré, passaremos a um segundo exemplo de seus trabalhos: a solução do caso não-linear por séries.

Dada uma equação diferencial não-linear, em vista das aplicações, como no problema da estabilidade de um sistema físico, tinha-se a idéia de que poderíamos empregar os desenvolvimentos em série, considerando apenas um número finito de termos. Poincaré foi bem mais longe, encontrando, para o caso não-linear, um desenvolvimento formal da integral válido em todo o plano. Tratam-se de infinitos desenvolvimentos convergentes para todos os valores reais da variável[33]. Se trata na verdade de um tipo de série de Taylor, a menos de uma mudança de coordenadas. Mas Poincaré afirmará que estas expansões não são contudo "satisfatórias" e gostaríamos de esclarecer em que sentido Poincaré emprega este adjetivo.

A solução do caso geral linear pelas funções fuchsianas e pelos grupos de substituições era considerado "satisfatório". Neste caso "era necessário fazer uma hipótese sobre os coeficientes das equações que eu queria estudar. Se eu tivesse tomado, com efeito, por coeficientes *funções quaisquer*, eu teria obtido igualmente para as integrais *funções quaisquer* e, como conseqüência, eu não teria podido dizer nada de preciso a respeito da natureza destas integrais, o que era o meu objetivo."[34]. Vimos que a natureza destas integrais é conhecida a partir de propriedades dos grupos de transformações que são definidos neste estudo, como os grupos fuchsianos. É o contrário do que se passa no caso não linear, onde as expansões encontradas nos ensinam muito pouco sobre a natureza das funções das quais dependem os coeficientes.

Poincaré é da opinião de que o que Newton queria dizer, quando afirmou que sabia resolver todas as equações diferenciais, era que ele podia formar, pelo método dos coeficientes indeterminados, uma série de potências satisfazendo formalmente a equação (POINCARÉ, 1908a). Poincaré, no entanto, enfatiza que tal solução não nos "satisfaria", uma vez que a convergência das séries é muito lenta e os termos que se sucedem não obedecem a nenhuma lei que nos faça compreendê-los. Se temos séries que convergem rapidamente, e conhecemos a lei dos seus termos, teremos uma outra solução para a equação. Esta é a motivação da célebre frase:

[33]Este método pode se aplicar às soluções do problema dos três corpos, se eles não vêm a se chocar. Esta última situação será resolvida mais tarde por Sundman, para o caso de uma colisão tripla.

[34]"*Il était nécessaire de plus de faire une hypothèse au sujet des coefficients des équations que je voulais étudier. Si j'avais pris, en effet, pour coefficients des* **fonctions quelconques**, *j'aurais obtenu également pour les intégrales des* **fonctions quelconques** *et, par conséquent, je n'aurais pu dire quelque chose de précis au sujet de la nature de ces intégrales, ce qui était mon but*"(POINCARÉ, 1921, p.vii).

"Mas então não existem mais problemas resolvidos e outros que não o são; existem somente problemas *mais ou menos* resolvidos, dependendo se eles o são por uma série de convergência mais ou menos rápida, ou regida por uma lei mais ou menos harmoniosa"(POINCARÉ, 1908a).

No comentário sobre a solução do caso geral por séries, Poincaré vai mais longe, dizendo que o mais importante neste problema é a natureza das funções que são soluções da equação; este conhecimento íntimo, a resolução por séries não permite obter.

1.2.2 O ponto de vista qualitativo: o que é afinal um sistema dinâmico?

Para finalizar este capítulo, daremos um terceiro exemplo de um trabalho de Poincaré, que terá grande influência na continuação. Dissemos que, na abordagem qualitativa, trata-se, antes de tudo, de penetrar na globalidade do conjunto de soluções. O primeiro passo em direção ao estudo direto do conjunto de soluções, na obra de Poincaré, é o teorema sobre a existência e unicidade destas soluções demonstrado por Cauchy. É possível afirmar que este resultado já oferece uma visão do conjunto de soluções como um todo quando estabelece as condições para que duas destas soluções não possam se interceptar[35].

A primeira inovação de Poincaré que participa do ponto de vista qualitativo, se encontra em resultados que vêm estender o teorema de Cauchy através da demonstração de que as soluções dependem continuamente das condições iniciais (ou de certos parâmetros) do problema. O teorema de existência e unicidade afirma que, dada uma condição inicial, existe uma única solução da equação satisfazendo esta condição. Poincaré estende a validade deste teorema, aprofundando o interesse de se conhecer as propriedades do conjunto de soluções, descrevendo o modo como tais soluções dependem das condições iniciais.

Os teoremas de Poincaré, aos quais nos referimos, são enunciados explicitamente e demonstrados em seus trabalhos sobre a mecânica celeste, dos quais citamos o célebre artigo "*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*"

[35]Observamos anteriormente que, no caso mais geral, estas são as condições de Cauchy-Lipschitz mas Poincaré trabalha com o método dos majorantes de Cauchy (na época "cálculo de limites"), restringindo-se à versão analítica do teorema.

e o livro *Les méthodes nouvelles de la mécanique celèste*[36]. Podemos compreender facilmente porque a extensão dos resultados de Cauchy é importante nestes trabalhos. Sabemos que o movimento de dois corpos, interagindo pela atração gravitacional, pode ser descrito pelas leis de Kepler. Tais corpos se movimentando segundo órbitas elípticas, se estas são fechadas. O problema dos três corpos é estudado a partir de uma perturbação destas órbitas, que depende de um certo parâmetro. É neste contexto que se insere o objetivo de Poincaré de estudar o modo como o conjunto de soluções de uma equação diferencial varia, quando variamos um parâmetro desta equação. Na verdade, interessa-nos aqui um caso que é estudado ao mesmo tempo que este, mas que visa a dependência das soluções em relação às condições iniciais.

Mesmo que estes resultados sejam enunciados explicitamente no final dos anos oitenta, notamos, em trabalhos anteriores, que Poincaré assume, em várias ocasiões, implícita ou explicitamente, a dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais. Já na primeira e na segunda parte da memória "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*", publicadas respectivamente em 1881 e 1882, o autor utiliza esta propriedade. Detalharemos um exemplo deste procedimento no terceiro capítulo quando analisaremos com mais atenção estas passagens, aproveitando o presente capítulo para citar brevemente alguns resultados que se encontram em outros trabalhos que compõem a obra de Poincaré sobre as equações diferenciais.

Nos trabalhos sobre as funções fuchsianas, encontramos uma das primeiras ocorrências explícitas da pergunta que concerne ao modo como as soluções dependem das condições iniciais. Visto o sucesso da solução das equações lineares com os métodos originários do trabalho de Fuchs, era natural perguntar se podíamos encontrar uma nova classe de equações integráveis a partir das equações com um número finito de singularidades. A questão de Fuchs dava as condições para que uma equação de primeira ordem possuísse um número finito de singularidades. Mas Poincaré demonstrou que a esperança de encontrar uma nova classe de equações integráveis era vã, mostrando que as condições de Fuchs poderiam ser reduzidas aos casos já conhecidos. Nos artigos relativos a esta questão[37], Poincaré considera simultaneamente todas as soluções de uma certa equação diferencial, não considerando mais y como função de

[36]Respectivamente (POINCARÉ, 1890) e (POINCARÉ, 1892-1899).
[37]Ver, por exemplo, (POINCARE, 1884) e (POINCARE, 1885).

x, mas sua variação em relação às condições iniciais y_0[38].

A dependência contínua em relação às condições iniciais é fundamental na definição de um sistema dinâmico. Terminaremos este capítulo definindo, a partir de uma equação diferencial, o que chamamos um *sistema dinâmico*, enfatizando como esta definição já traz consigo o modo qualitativo de olhar para as soluções e como o teorema de existência e unicidade das soluções e os resultados subseqüentes de Poincaré são essenciais nesta nova definição. Nosso objetivo é mostrar como o problema relativo à solução de uma equação diferencial equivale ao estudo do que chamamos um *fluxo*, associado a esta equação, que habita um *espaço de fases*. Podemos antecipar que um fluxo é um dos modos pelos quais um sistema dinâmico se define.

Mesmo que não pretendamos traçar uma história detalhada dos trabalhos que precederam a definição de fluxo, mencionaremos algumas idéias que são a ela associadas. Não poderíamos, portanto, deixar de mencionar a definição que Birkhoff nos apresenta em 1912, no primeiro artigo que encontramos onde se fala explicitamente de *sistemas dinâmicos*: "*Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques*"[39]. Segue a definição:

"Um sistema dinâmico, em uma concepção ampla, pode ser considerado como definido por um sistema qualquer de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\frac{\mathrm{dx_1}}{X_1} = \frac{\mathrm{dx_2}}{X_2} = \ldots = \frac{\mathrm{dx_n}}{X_n} = \mathrm{dt}$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ são funções dadas, reais e uniformes de $x_1, \ldots, x_n$, analíticas em relação a estas variáveis, e onde t é a variável independente. As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são as *coordenadas* do movimento, e t indica o *tempo*" (BIRKHOFF, 1912).

Ele continua, ressaltando que, se representamos as coordenadas do movimento como um ponto no espaço de n dimensões, as curvas, que são soluções do sistema diferencial, serão também curvas do mesmo espaço. Excluindo então os pontos singulares[40], por um certo ponto P passa uma e apenas uma curva, sobre a qual, a dois

[38] Ele demonstra, então, que existe uma relação biracional entre y e y_0, que implica o resultado mencionado.

[39] Este trabalho foi apresentado pela primeira vez em 1909, em uma reunião da *American Mathematical Society*.

[40] Birkhoff não utiliza esta nomenclatura mas observa que devemos excluir os pontos onde ao menos uma das funções X_i deixa de ser analítica e aqueles em que as equações $X_i = 0$ são todas satisfeitas simultaneamente.

pontos quaisquer, corresponde um intervalo de tempo que, é o tempo necessário para as coordenadas do movimento passarem das coordenadas referentes ao primeiro ponto até as do segundo. E ainda, aplicando "um teorema bem conhecido" às soluções do sistema, podemos dizer que a variação contínua de P produz uma variação contínua da curva que possui este ponto como condição inicial.

A consideração de que cada solução varia com um parâmetro que é tomado pelo *tempo* é uma das características do ponto de vista que irá fundar a teria dos sistemas dinâmicos, como o próprio nome indica[41]. Este modo de ver o problema já estará presente a partir da terceira parte de "*Sur les courbes...*" quando Poincaré considera explicitamente a questão da estabilidade, o que ficará ainda mais claro nos trabalhos sobre a mecânica celeste publicados mais tarde.

No problema restrito dos três corpos, a argumentação de Poincaré irá se basear freqüentemente em uma interpretação hidrodinâmica, onde as órbitas aparecem como *linhas de fluxo* de um fluido em três dimensões. Lembramos que em torno da mesma época em que publica seus mais importantes trabalhos sobre a mecânica celeste (final dos anos oitenta), Poincaré está em contato com as teorias de Maxwell introduzidas em seus cursos. Salientamos o quanto, nestas teorias, a idéia de fluido deve se tornar abstrata para se adaptar de modo coerente à eletrostática. Poincaré defende Maxwell contra algumas críticas de seus contemporâneos, afirmando que se pode admitir a existência de um fluido de eletricidade sem que este possua uma realidade objetiva e que, quando Maxwell fala de "deslocamento elétrico" está correto mesmo que não se trate de "um verdadeiro movimento de uma verdadeira matéria"(POINCARÉ, 1899, pp.17-18).

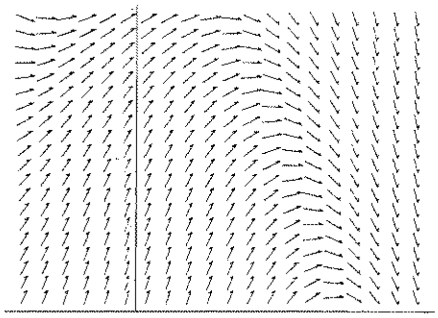
Poincaré não menciona, no entanto, nenhuma inspiração deste tipo em seus trabalhos sobre as equações diferenciais; mas, a partir de seu novo ponto de vista sobre o conjunto de soluções, um sistema dinâmico pode ser definido de modo análogo a um fluxo, como fica claro na definição de Birkhoff. Podemos considerar, de modo mais geral[42], que os estados do conjunto de movimentos definidos por um sistema diferencial correspondem aos pontos de uma variedade fechada. Os movimentos, quando

[41]Ressaltamos que concebemos o tempo como newtoniano, ou seja, um parâmetro real.

[42]Como o fará Birkhoff mais tarde, como por exemplo no livro *Dynamical Systems* (BIRKHOFF, 1927a).

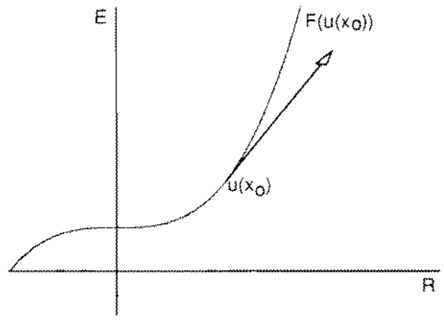
o tempo evolui, serão curvas sobre esta variedade, onde os pontos se movem, dando origem a um aspecto global, que é como o movimento de um fluido sobre esta variedade. Já se trata aqui de uma definição que, ao mesmo tempo que guarda os traços da inspiração vinda da física, torna-se mais abstrata ao se generalizar para outros espaços. Gostaríamos, então, de definir o que é um fluxo, de modo mais rigoroso, para comentar ao final como se cruzam, nesta definição, influências, explicitas ou não, de teorias físicas e de uma área da matemática, que estavam em plena ascensão no tempo de Poincaré.

Começamos com a noção abstrata de um campo vetorial F definido em $\mathbb{R}^n$ que associa a cada ponto v, deste espaço, um vetor $F(v)$, também neste espaço. Um campo de vetores é, em princípio, um objeto absolutamente independente de uma equação diferencial, e trataremos justamente de saber quando, dado um campo qualquer, este representa vetores que são tangentes às soluções de uma equação diferencial. A figura abaixo é um exemplo de campo de vetores bidimensional.



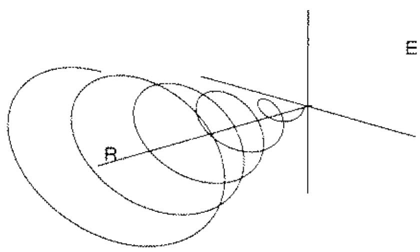
Tomando-se então esta função F, associar esta função a uma derivada é dizer que os vetores definidos por F devem ser tangentes a uma curva. Quando escrevemos uma equação diferencial $v' = F(v)$, onde F é um campo de vetores, a solução da equação por um ponto v_0 é uma função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e a equação impõe que os vetores tangentes a esta solução sejam os vetores que obtemos aplicando o campo F aos pontos da curva, que será o gráfico da função u. Exemplificamos isto no desenho para um ponto $u(x_0)$ nesta curva.

O que é fundamental neste ponto é notar que esta curva, que terá os vetores do campo como tangentes, fica bem definida, quando determinamos uma condição inicial. Aqui, faz-se necessário o teorema de existência e unicidade para afirmar que,



dada uma condição inicial, existe uma e apenas uma solução que passa por ela. Como conseqüência, tudo o que diremos a partir deste ponto é válido sob certas hipóteses que serão dadas, no caso mais geral, pelas condições de Cauchy-Lipschtz.

Teríamos assim que nos pontos $u(x)$ sobre a curva, a condição $u'(x) = F(u(x))$, dada pela equação diferencial, seria satisfeita. Isto quer dizer que esta função seria uma solução da equação que passa por um ponto $v_0 = u(x_0)$. O gráfico de u está desenhado no espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que no desenho acima consideramos como sendo o $\mathbb{R}^2$.

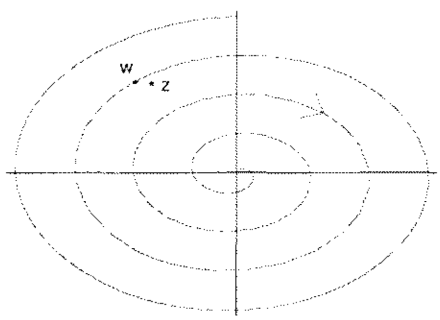


Este seria um outro exemplo onde o campo está definido em $\mathbb{R}^2$ e o gráfico estará em três dimensões.

A definição de uma equação diferencial do modo que enunciamos acima é, portanto, um problema, repetimos, o de saber se um campo de vetores determina vetores, que serão tangentes às curvas obtidas, por sua vez, a partir das soluções de uma equação diferencial. A solubilidade deste problema depende do resultado sobre a existência e a unicidade das soluções.

Podemos visualizar uma solução como a trajetória de uma partícula que se move em $\mathbb{R}^n$ tal que, em um certo instante, sua velocidade é dada pelo valor do campo de vetores na posição da partícula. Veremos que esta é exatamente a definição de uma *trajetória*, tal como ela é apresentada por Poincaré no artigo de que trataremos nos capítulos seguintes, visão que está presente na definição de fluxo que começamos a formular neste momento.

Observamos no último gráfico que, quando os valores sobre o eixo $\mathbb{R}$ aumentam, a curva gira com raios cada vez maiores. Consideremos então, e este é o pulo do gato, que os valores de $\mathbb{R}$ determinam instantes e que, percorrendo-se $\mathbb{R}$ na direção positiva, estamos realizando uma evolução no tempo. Isto é sempre possível, visto que, dadas as condições que garantem a existência e a unicidade das soluções, uma solução é definida em um subconjunto de $\mathbb{R}$. O conjunto de todas as soluções definirão juntas uma *dinâmica* no espaço $\mathbb{R}^n$. Para a solução u do exemplo esta dinâmica pode ser representada como vemos em seguida:



Vemos que o tempo não está representado no gráfico como uma coordenada independente, mas é intrínseco à curva. A solução u deu origem a uma curva em $\mathbb{R}^n$ e passaremos a considerar o conjunto de todas estas curvas sincronizadas no espaço. Para isto, definimos uma função $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dado um ponto w de $\mathbb{R}^n$, esta função nos dá, para cada t, a evolução do ponto w pela dinâmica definida pela solução que passa por w, isto é, a trajetória de w. A função $\phi_t(w)$ é o *fluxo* definido pela equação diferencial, pela condição inicial w, que representa a evolução desta condição inicial.

Mas ainda não dissemos como definir o fluxo do conjunto de soluções. Vimos apenas um exemplo para a solução u e sabemos que há uma única solução para cada condição inicial. Isto quer dizer que se tomamos um ponto w por condição inicial de uma trajetória $\phi_t(w)$ deve estar sempre sobre a mesma trajetória. Tomando então um outro ponto z sobre $\mathbb{R}^n$ que não está sobre $\phi_t(w)$ teremos uma outra evolução, dada por uma função que queremos que seja $\phi_t(z)$ para que o fluxo esteja bem definido. Precisamos definir uma função $\phi(t, v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dependendo de t e do ponto inicial v do qual queremos estudar a evoluçãoe tal que $\phi_t(v)$ é a trajetória do ponto v[43]. Esta função nos dará para cada valor de t o *estado*, ou a *fase*, do sistema para todas as condições iniciais. Por outro lado, se para um certo valor de v nós variamos t, obtemos toda a evolução de v pela dinâmica definida pela equação diferencial. Sendo assim, a função ϕ_t aplicada a todas as condições iniciais (um ponto em $\mathbb{R}^n$) nos fornece um quadro global do conjunto das trajetórias. O espaço onde estas trajetórias habitam será denominado um *espaço de fases*.

Mas para terminar a definição da função ϕ, que passaremos a chamar de fluxo, precisamos garantir que ela esteja definida em um subconjunto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Um ponto (t_0, w_0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ deve pertencer a Ω se somente se existe uma solução cujo valor inicial é w_0. Dado um ponto w_0, que é condição inicial de uma solução, e um ponto z_0 em sua vizinhança que não pertence a sua trajetória, devemos saber se z_0 também está em Ω, isto é, se há solução da equação pelo ponto z_0. É justamente o que foi demonstrado por Poincaré: as soluções dependem continuamente das condições iniciais. Logo, para duas condições iniciais próximas, temos duas soluções, o que garante a existência de solução por z_0. Concluímos que z_0 está em Ω e que este conjunto é um aberto.

Podemos definir assim o fluxo $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$. A aplicação ϕ_t satisfaz as seguintes propriedades:

(i) ϕ_0 é a identidade;

(ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada t e s em $\mathbb{R}$.

Da mesma forma, dado um fluxo, podemos mostrar, de modo ainda mais simples, que ele define uma equação diferencial, o que viria terminar a demonstração da equivalência entre uma equação diferencial e um fluxo. Mesmo ambos os objetos matemáticos sendo equivalentes, trata-se de duas maneiras distintas de se atacar o problema. *Um sistema dinâmico é então um modo de se descrever a passagem no tempo de todos os pontos de um certo espaço.*

[43]Lembremos que $F(v)$ é o vetor tangente a v dado pelo campo logo, para que o fluxo esteja bem definido é preciso que F tenha diferenciabilidade C^1.

Podemos interpretar as duas propriedades do fluxo como relativas a um modo de passagem do tempo. Fazendo isto, a primeira condição define o tempo presente e a segunda nos informa que o tempo flui de modo único e unidimensional. São, com efeito, estas as propriedades que permitem que o tempo não seja uma variável explícita, ou uma coordenada do espaço de fase, onde representamos os estados do sistema. As duas propriedades combinadas nos permitem tirar ainda uma outra conclusão que poderíamos não enxergar imediatamente: $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0$. Isto quer dizer que, por uma certa trajetória, podemos ir e voltar, sem que isto apresente ambigüidade, pois há apenas uma solução para cada condição inicial[44].

Sobre as duas propriedades do fluxo gostaríamos de tecer ainda um último comentário, que será de suma importância na continuação deste trabalho: *estas propriedades indicam uma estrutura de grupo sobre o domínio.* Todo o processo que utilizamos para definir um fluxo em $\mathbb{R}^n$ poderia ser empregado sobre uma variedade M, com certas propriedades, como já havíamos indicado na citação que escolhemos do livro de Birkhoff. Dado então um certo domínio, digamos M, um fluxo pode ser definido como a ação de um grupo contínuo sobre M.

Birkhoff mais uma vez já havia atentado para este fato, indo mais longe na generalização da definição em um espaço abstrato:

"O tipo de espaço abstrato, R, melhor de se empregar parece ser um espaço métrico compacto. Correspondendo à mudança no "tempo" t, existe um fluxo do espaço R nele mesmo, cada ponto traçando uma "curva de movimento" em R. Os pontos individuais representam "estados do movimento", e cada curva de movimento representa o movimento completo do sistema dinâmico abstrato. Sendo assim, temos não apenas um espaço abstrato R mas um "grupo contínuo" $G : t' = t + c$"(BIRKHOFF, 1941)[45].

Antes de enunciar o problema deste modo, o autor cita a "análise geral" de E. H. Moore, onde a variável independente varia em um espaço abstrato[46]. Em particular, quanto à aplicação das idéias de Moore aos sistemas dinâmicos, Birkhoff menciona uma conferência sobre sistemas dinâmicos realizada na universidade de Chicago em

[44]Mesmo que isto pareça exagerado, lembramos, mais uma vez, que isto é conseqüência da existência e da unicidade das soluções.

[45]Também podemos definir um sistema dinâmico discreto, como comentaremos no quarto capítulo, onde este grupo será descontínuo, o que é observado por Birkhoff na continuação do trecho que citamos.

[46]Também são citados trabalhos de M. Fréchet e Erhard Schmidt.

1920. No entanto, ao lado da influência dos americanos, ele não deixa escapar os importantes trabalhos da escola russa. Estamos em 1941, em plena Segunda Guerra Mundial, momento a partir do qual os trabalhos dos matemáticos russos terão uma influência cada vez maior na pesquisa realizada no Ocidente, como voltaremos a observar na segunda parte desta tese.

Quanto a Poincaré, para retornar ao período que nos importa neste momento, ele não menciona explicitamente a influência da teoria dos grupos em seus trabalhos sobre a análise qualitativa. Mostramos, contudo, o quanto sua contribuição sobre a associação de grupos e equações diferenciais será decisiva em outros problemas, como na teoria sobre as funções fuchsianas. Para dar um exemplo da cultura matemática da época, destacamos que Klein havia encontrado um modo de identificar uma superfície riemanniana qualquer com a ação de um grupo descontínuo sobre um disco. Esta ação irá fornecer informações sobre a continuação analítica das funções que podemos definir sobre a superfície. Poincaré, que se correspondeu com Klein durante os primeiros anos da década de 1880, também associava os grupos descontínuos à construção de superfícies de Riemann[47] mas, diferentemente de Klein, relacionava-os às equações diferenciais lineares.

Mesmo sem citarmos ligações históricas mais concretas, ressaltamos que o ambiente em que foi gestado o novo ponto de vista qualitativo sobre as equações diferenciais contava, de um lado, com uma teoria física que precisava considerar os fluidos de modo abstrato e, de outro, com aspectos geométricos, relacionados a equações diferenciais, identificados às ações de certos grupos. Poincaré tocou simultaneamente nos três problemas durante os anos oitenta, e não poderíamos deixar de mencionar que eles vêm convergir na definição de fluxo tal como a apresentamos acima, só formulada alguns anos mais tarde.

Esboçada a definição de sistema dinâmico como um fluxo, sentimo-nos preparados para passar à análise mais precisa de alguns problemas.

[47]Em 1881 Klein fala a Poincaré dos trabalhos de Riemann que este último desconhecia até então. Ver (GRAY, 1986).

Capítulo 2

O problema da linearização

2.1 Exposição do problema

Poincaré inicia a memória "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" estudando localmente as soluções de uma equação diferencial polinomial real de primeira ordem e primeiro grau $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{Y}{X}$. As curvas que representam as soluções são denominadas *características* e deseja-se descrever o comportamento destas características na vizinhança dos pontos singulares da equação.

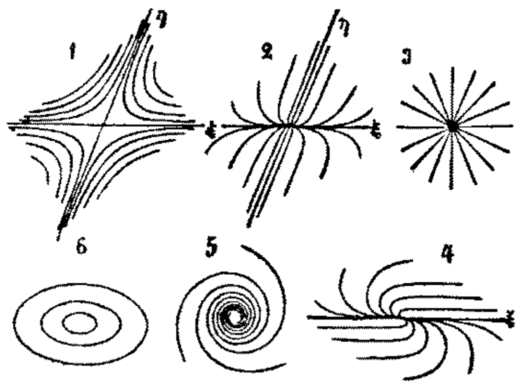
Nestes pontos o teorema de existência e unicidade não vale, e Poincaré irá estudar as singularidades simples classificando-as em *colos*, *nós*, *focos* e *centros*[1], segundo o aspecto das características em suas vizinhanças. A classificação é feita segundo as raízes de uma certa equação associada à parte linear da expansão local em série de X e de Y. Os tipos de singularidades citados são obtidos se as raízes são respectivamente reais e de sinais contrários, reais e de mesmo sinal, complexas conjugadas com parte real diferente de zero e imaginárias puras.

Para fazermos uma idéia da reação que esta conclusão despertou em sua época, mencionamos uma carta enviada a Poincaré por G. Fouret, da qual tomamos conhecimento por um artigo de Christian Gilain(GILAIN, 1991, p.226). Tendo trabalhado sobre as equações de primeira ordem e primeiro grau, Fouret afirma que os pontos singulares devem ser em geral do tipo *foco*, e que os pontos de tipo *nó* só devem aparecer em situações excepcionais. No entanto, Poincaré termina por convencê-lo de que

[1] "*Cols, nœuds, foyers et centres*". Traduzimos o primeiro caso por *colo* para sermos mais fiéis ao original, mas as singularidades deste tipo chamam-se usualmente *pontos de sela*.

estava equivocado. Citamos brevemente esta passagem, com o único fim de ressaltar o quão surpreendentes podem ser algumas conclusões em matemática, fazendo-as parecer mais fortemente descobertas que invenções.

Sobre a classificação das singularidades feita por Poincaré, é preciso dizer que os mesmos casos já haviam sido encontrados, sem a respectiva nomenclatura, pelo matemático russo N. E. Joukovsky (JOUKOVSKY, 1876), ao estudar a dinâmica de um fluido[2]. Poincaré não tinha conhecimento do trabalho de Joukovsky e, apesar de descrever com detalhes os aspectos geométricos dos casos possíveis na vizinhança das singularidades, o matemático francês não nos oferece nenhum desenho desses casos, a figura abaixo tendo sido retirada do artigo de Joukovsky.



Para analisar a vizinhança das singularidades, Poincaré utiliza uma adaptação ao caso real dos métodos formulados por Briot e Bouquet(BRIOT & BOUQUET, 1856) para estudar, no domínio complexo, os casos em que o teorema de Cauchy não se aplicava. Estas mesmas ferramentas já haviam sido empregados por Poincaré em sua tese: "*Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*" (POINCARÉ, 1879). Nesta tese ele havia demonstrado a existência de uma linearização local, na vizinhança das singularidades, para um sistema de equações diferenciais analítico definido no domínio complexo pelas funções $X_1, ..., X_n$. Dizer que uma linearização existe, é, neste caso, o mesmo que afirmar a possibilidade de substituirmos o sistema original pelo sistema definido pela parte linear da expansão em série das funções X_i. Isto quer dizer que, localmente, as partes não-lineares que

[2]Sobre este trabalho ver V. A. Dobrovolsky (DOBROVOLSKY, 1972): "*Sur l'histoire de la classification des points singuliers des équations différentielles*".

serão desprezadas não alteram o aspecto das soluções.

Consideremos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ as raízes de uma equação associada à parte linear da expansão em série de $X_1, ..., X_n$. Para que a linearização seja possível, três condições devem ser satisfeitas. A primeira diz respeito à possibilidade de se exprimir os termos de primeira ordem de $X_1, ..., X_n$ como $\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n$, onde $x_1, ..., x_n$ são as variáveis do problema. O sistema pode ser reescrito, como muitos autores o farão, como uma perturbação do sistema linear $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$. No dizer de Poincaré, as duas outras hipóteses são:

"*Hipótese II* - Se representamos as partes reais e imaginárias dos λ pelas coordenadas de n pontos em um plano, estes n pontos estão de um mesmo lado de uma certa reta passando pela origem.

Hipótese III - Um dos λ não é igual a uma função linear de coeficientes positivos dos outros λ" (POINCARÉ, 1879, p.cvi).

A terceira hipótese garante a existência de expansões formais em séries de potências e a segunda garante a convergência das séries. Em linguagem atual, estas raízes são os autovalores: a segunda hipótese diz que eles devem pertencer a um semi-plano aberto de $\mathbb{C}$, e a terceira é uma condição de independência linear dos autovalores[3]. O fato de que a equação é analítica possibilita o uso do método dos majorantes de Cauchy, que permite a Poincaré encontrar uma mudança de coordenadas analítica que transforme o sistema original no sistema linear correspondente. As soluções do sistema linear e do sistema original são as mesmas, a menos de uma mudança de coordenadas analítica.

Em "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" o mesmo resultado é adaptado para o caso real polinomial em dimensões dois e três. Parte-se do caso linear, no qual será aplicada ma perturbação, e suas conseqüências analisadas. Este método quase sempre dá bons resultados, falhando apenas quando os valores das raízes são imaginários conjugados, caso em que a singularidade é de tipo centro, situação que é muito sensível a perturbações. Este caso é excepcional, como diz Poincaré, visto que ele não se apresentará se X e Y forem "os polinômios mais gerais de seus respectivos graus". A perturbação de um centro só será entendida pela análise global,

... condição de não ressonância entre os autovalores.

da qual falaremos mais tarde. Os mesmos métodos serão empregados com sucesso para a equação de primeira ordem e do segundo grau, onde as soluções podem ser estudadas sobre uma superfície no espaço tridimensional e a descrição local é análoga ao caso bidimensional. Em dimensão três, quer dizer, estudando a equação de segunda ordem na vizinhança das singularidades simples, a análise local utilizará as mesmas ferramentas do caso bidimensional. Teremos apenas o problema adicional de combinar as três raízes, dando lugar a um outro tipo de singularidade que Poincaré denomina *colo-foco*.

Os resultados da tese de Poincaré, bem como do artigo que consideramos em nossa tese, estabelecem as condições de linearização local das soluções de uma equação diferencial que é válida a menos de uma mudança de coordenadas analítica. Teremos então um momento típico de gênese do que denominamos provisoriamente *verdades combinadas*. Ao contrário do que muitas vezes se pensa, a matemática não lida com verdades, mas com condições de verdade. Um teorema matemático vem sempre responder a uma pergunta sobre as condições para que um certo enunciado seja válido e o resultado propriamente dito procura esgotar as conseqüências de tais condições.

Isto se aproxima do que disse Platão ao justificar o posicionamento das idéias matemáticas no diagrama da linha proposto no livro sétimo da República onde, para além da divisão entre mundo sensível e mundo inteligível, cada um destes mundos serão subdivididos novamente. No sensível, mundo das cópias, deve-se diferenciar os simulacros— que são reflexos, sombras e outros seres ambíguos— das cópias que representam idéias de forma mais fidedigna.

Por outro lado, no mundo das idéias, será feita uma subdivisão entre os objetos matemáticos e a os objetos da dialética. A dialética ocupa a posição superior no diagrama, visto que parte de hipóteses, para ultrapassá-las em direção a um princípio anipotético. Ao passo que a matemática permanece sempre atrelada a princípios primeiros, dos quais extrai as conseqüências ou formula seus enunciados, devendo por isso mesmo, segundo Platão, ocupar uma posição inferior a da dialética.

Ao fazermos esta observação, na realidade, não nos importamos com a posição hierárquica da matemática na subdivisão do mundo das idéias, pontuando apenas que dialogamos com Platão, admitindo que as verdades matemáticas não são independentes de suas hipóteses. No entanto, iremos investigar um processo típico de evolução das idéias matemáticas para, ao final, precisar o ponto onde divergimos de Platão. Partiremos para isso do teorema de linearização, investigando como relaxamos, uma de cada vez, as condições admitidas por Poincaré e as transformações que este procedimento ocasiona nos resultados. Resultados cuja busca pode determinar, ao mesmo tempo, as suas condições de validade.

Nos nossos dias, o teorema de Sternberg generaliza o teorema de Poincaré, onde a mudança de coordenadas é analítica, estabelecendo as condições para que exista uma mudança de coordenadas entre uma certa situação local não linear e sua aproximação linear, que seja apenas diferenciável (difeomorfismo). Existe ainda a possibilidade de empregarmos somente uma mudança de coordenadas contínua (homeomorfismo), noção que virá responder a perguntas de uma outra natureza, e dará origem ao teorema de Grobman-Hartman. Descreveremos brevemente como o resultado inicial de Poincaré está na fonte de ambos os teoremas citados, enfatizando, quando for o caso, as diferenças de ponto de vista que eles envolvem.

Um dos primeiros trabalhos que fazem uso da abordagem qualitativa é o livro *Problema geral da estabilidade do movimento*, do matemático russo Lyapunov, publicado em 1892 em russo e traduzido para o francês em 1907 (LYAPUNOV, 1907). Lyapunov cita o artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" como uma das motivações de seus próprios métodos, mas obtém resultados absolutamente originais em relação àqueles obtidos por Poincaré. O matemático russo critica o emprego não justificado que se fazia da forma linear nos problemas de equilíbrio de um sistema físico, e motiva seu próprio trabalho no estudo rigoroso das condições de linearização: "a legitimidade de uma tal simplificação não se justifica por nada *a priori*(...)Pelo menos é evidente que, se a resolução do problema simplificado pode dar uma resposta ao antigo, é somente sob certas condições, e estas últimas não são indicadas ordinariamente"(LYAPUNOV, 1907).

Na verdade, tais críticas participavam na verdade de restrições mais profundas do autor russo em relação aos trabalhos de Thomson e Tait (THOMSON & TAIT, 1879-1883) e do próprio Poincaré sobre a definição de estabilidade relativa às figuras de equilíbrio de um fluido em rotação. Retornaremos a estas críticas no capítulo onde tratamos da estabilidade, mas pontuamos que as restrições à obra de Poincaré visavam apenas os trabalhos sobre as figuras de equilíbrio. Sobre o problema de que tratamos neste capítulo, Lyapunov demonstra que, se não exigimos a condição de independência linear (como na terceira hipótese da tese de Poincaré), não existe em geral uma linearização diferenciável e pode-se garantir, no máximo, uma forma normal não-linear. Tudo isso para o caso onde a equação é analítica.

É importante notar que o artigo de Poincaré opera um deslocamento do estudo do caso complexo, o qual predominava na pesquisa de seus antecessores, para o caso real. No caso complexo, o estudo de singularidades de ordem superior foi estendido por vários autores como Picard, Horn, Lindelöf e Dulac. No entanto, no caso real, que é o que tratamos neste trabalho, além de Lyapunov, um dos primeiros desdobramentos dos resultados de Poincaré foi proposto por I. Bendixson, matemático sueco que generalizou vários dos teoremas de Poincaré, sendo alguns para o caso não-analítico. Se X e Y começam por termos lineares e a singularidade não é um foco, Bendixson divide a vizinhança desta singularidade em regiões delimitadas por soluções que tendem para a singularidade. Ele mostra então que, nestas regiões, o comportamento das soluções é análogo ao da vizinhança de um colo ou de um nó. Neste último caso tais regiões são ditas *nodais*. Considerando estas regiões na vizinhança de pontos singulares de ordem superior para o caso analítico, Bendixson determina o número máximo de regiões quando as expansões de X e de Y não começam por termos lineares. Este trabalho será importante principalmente na generalização do resultado global de Poincaré analisado no próximo capítulo. Voltando ao problema da linearização, no caso analítico, observamos que H. Dulac (DULAC, 1912), fortemente inspirado pelos trabalhos de Bendixson, simplificou o problema, reduzindo as equações originais em dimensão n a uma forma em que a integração é possível.

Se pensamos na possibilidade da linearização, desprezando alguma das hipóteses da tese de Poincaré, novas idéias serão apresentadas por Birkhoff, em dois artigos publicados por volta de 1930, (BIRKHOFF, 1929) e (BAMFORTH & BIRKHOFF, 1930). Estes artigos procuram saber o que acontece se desprezamos a condição de que as raízes da equação característica (nomenclatura utilizada por Birkhoff) estão em um mesmo semi-plano do plano complexo (hipótese II). Neste caso as séries são divergentes mas os autores mostram que, nos casos reais em que $n = 2$ ou $n = 3$, exigindo-se apenas que as raízes não sejam todas de mesmo sinal, a linearização é válida por uma transformação C^{∞} na vizinhança da origem. As equações são analíticas mas, enfraquecendo-se as condições, não conseguimos mais encontrar uma mudança de coordenadas analítica. A razão disto é a divergência das séries mas, ainda assim, é demonstrado que esta transformação é analítica em "quase todo ponto" desta vizinhança.

Ainda neste caso, não considerando que as raízes pertencem ao mesmo semi-plano complexo e assumindo-se apenas que elas não são imaginárias puras, se exigirmos uma condição mais forte para substituir a terceira hipótese da tese de Poincaré, o problema foi considerado por Siegel em 1952 (SIEGEL, 1952). Importante notar que neste artigo as raízes da equação característica já são chamados autovalores ("*Eigenwerte*") e o problema é identificado como um problema de forma normal ("*Normalform*"). Além disso, o enunciado do problema ganha um novo tom, com a utilização de uma linguagem de teoria dos grupos. Abaixo citamos aproximadamente os termos em que Siegel coloca o problema, indicando entre parênteses quando há sinônimos de algum dos nomes que já empregamos até aqui.

Seja um sistema $\dot{x}_k = P_k$ de n equações diferenciais de primeira ordem e supomos, sem perda de generalidade, que as funções P_i se anulam no ponto $x_i = 0$. Na vizinhança de tal ponto, existe uma mudança de coordenadas $y_k = F_k(x_1, ..., x_n)$ tal que o sistema original pode ser escrito como $\dot{y}_k = Q_k$. Trata-se do problema de encontrar sistemas invariantes sob o grupo de mudanças de coordenadas a partir de duas perguntas:

Quando dois sistemas dados são equivalentes por uma certa mudança de coordenadas convergente?

Agrupando-se sistemas equivalentes em uma classe, como ficam as formas normais em cada classe de sistemas?

No caso que consideramos neste capítulo, a forma normal em questão é linear. Um primeiro passo para responder a estas perguntas é a noção de *conjugação*, que também é mencionada por Siegel. Seja M a matriz associada à parte linear de $\dot{x}_k = P_k$ e N a matriz associada à parte linear da mudança de coordenadas. Temos que NMN^{-1} leva o sistema $\dot{y}_k = Q_k$ nas partes lineares dos Q_i. A transformação M é uma conjugação entre as partes lineares de P_i e Q_i.

Mas exigimos até aqui que as equações fossem analíticas. Um dos primeiros artigos a tratar do caso real não analítico foi publicado em 1957 por Nagumo e Isé(NAGUMO & ISÉ, 1957), que buscam as condições para que exista uma linearização C^1. Não entraremos nos detalhes deste trabalho, pois nos apressamos para chegar ao nome de Sternberg[4]. Inspirado por questões relacionadas ao estudo de equações diferenciais a partir de ferramentas da teoria dos grupos, Shlomo Sternberg inicia uma série de trabalhos sobre o tema da linearização por volta de 1955. Sternberg foi aluno de Aurel Winter, bem como Philip Hartman, outro dos protagonistas desta história, sobre quem falaremos mais tarde.

Já vimos alguns exemplos de como o estudo das equações diferenciais pode ser feito pela via de sua associação a propriedades de certos grupos de transformações. Citamos brevemente, no primeiro capítulo, como Poincaré associa a solubilidade de uma equação linear a uma propriedade de descontinuidade de um grupo associado a tal equação. Na segunda metade do século XIX, o estudo das soluções das equações algébricas, certos problemas geométricos e a análise das soluções das equações diferenciais associaram-se freqüentemente ao estudo de propriedades do grupo correspondente. Elie Cartan introduz uma novidade em tal associação, tendo sido o primeiro a pensar reciprocamente, investigando, a partir de um grupo, que geometrias estão a ele associadas. No caso das equações diferenciais, a colaboração de Cartan tem uma de suas raízes no trabalho de Sophus Lie. Este último havia estudado a integração de sistemas diferenciais que admitem um grupo de transformações, contínuo e de ordem finita, com uma estrutura particular. A partir da teoria de Lie, e das pesquisas de Vessiot, Cartan inicia o estudo de grupos infinitos[5], reduzindo-o, em particular, à

[4] O caso do artigo de Nagumo e Isé será tratado pelo próprio Sternberg em um artigo de 1958 (STERNBERG, 1958) e, alguns anos mais tarde, por Chen, em um trabalho publicado em 1963 também no *American Journal of Mathematics* (CHEN, 1963). Interessante notar que vários dos trabalhos dos quais falamos aqui foram publicados no mesmo *American Journal of Mathematics*, bem como alguns dos próximos que iremos citar. Ao que parece, neste período, as discussões sobre este problema circulavam bastante neste jornal que era editado por Aurel Winter.

[5] O que era chamado um "grupo infinito" não é considerado um grupo no sentido atual do termo. Tratam-se de famílias de homeomorfismos definidos em vários domínios de uma variedade, satisfazendo certas equações diferenciais parciais. O problema é que os domínios de definição de diferentes

procura das equivalências de certos sistemas de equações diferenciais totais completamente integráveis. Nos artigos que publicou nos anos cinqüenta, percebemos que Sternberg foi bastante influenciado por este ponto de vista.

Começaremos por um trabalho de Sternberg que generaliza o resultado demonstrado na tese de Poincaré. Na verdade, a condição de que as raízes devem estar no mesmo semi-plano complexo, deixadas de lado nos últimos trabalhos citados, é retomada e adaptada ao caso real, onde ela força o sistema inicial a ser uma contração. Em um artigo publicado em 1957, "*Local contractions and a theorem of Poincaré*" (STERNBERG, 1957), que é uma parte de sua tese, Sternberg analisa as condições de linearização para contrações, com as mesmas condições da tese de Poincaré, para o caso não analítico. No entanto, uma marca deste artigo de Sternberg é o fato de que ele não trabalha sobre a equação diferencial, mas sobre o fluxo definido por esta equação diferencial. Já dissemos que este ponto de vista caracteriza uma abordagem de sistemas dinâmicos. A segunda hipótese da tese de Poincaré, de que as raízes devem estar sobre um mesmo semi-plano complexo, equivale ao fato da parte real dos autovalores ser negativa. Neste caso, o fluxo gerado pela equação diferencial do problema é um semi-grupo de contrações, a um parâmetro, em uma vizinhança da origem.

Ambas as condições da tese de Poincaré são mantidas, mas eliminando-se a hipótese de que as equações são analíticas, não é possível aplicar o método dos majorantes de Cauchy, como o fizera Poincaré. O objetivo do artigo será assim enunciado por Sternberg:

"No que segue nós devemos obter formas normais para contrações suaves no n-espaço euclidiano, isto é, devemos obter invariantes para contrações C^k sob automorfismos do grupo de mudanças de coordenadas locais C^k" (STERNBERG, 1957, p.810).

Demonstra-se assim que qualquer sistema de equações diferenciais de classe C^k, satisfazendo as hipóteses da tese de Poincaré, pode ser linearizado por uma mudança de coordenadas C^k. Esta generalização para um k qualquer só foi possível porque

homeomorfismos não são necessariamente os mesmos, o que faz com que eles não formem um grupo.

Sternberg trabalha diretamente nas propriedades do grupo de transformações C^k locais[6]. Podemos entender qual o papel das hipóteses II e III, pois o autor demonstra que, em um sub-grupo tomado convenientemente, se tais hipóteses são satisfeitas e é adicionada uma hipótese sobre k, qualquer transformação pode ser linearizada por uma mudança de coordenadas que também pertence ao grupo. Tanto o fluxo que queremos linearizar, tomado em um certo instante[7], quanto a mudança de coordenadas que lineariza são tomados como elementos de um mesmo conjunto e isso porque, ao invés de considerarmos a equação diferencial, consideramos o fluxo determinado por esta equação.

Ainda sobre este artigo de Sternberg, destacamos que é demonstrado facilmente, a partir dos resultados gerais obtidos sobre o grupo de transformações, que, se não exigimos a condição de não-ressonância sobre os autovalores, não existe em geral uma linearização diferenciável e podemos garantir, no melhor dos casos, uma forma normal não-linear. Este resultado é uma generalização, para o caso não analítico, do teorema de Lyapunov citado anteriormente. São obtidos ainda uma generalização para um resultado de Siegel, eliminando suas premissas de analiticidade e um teorema sobre variedades invariantes, que comentaremos no próximo capítulo.

Algumas considerações sobre as propriedades dos grupos formados pelas mudanças de coordenadas empregadas irão nos inspirar algumas tímidas conclusões ao final do capítulo. As mudanças de coordenadas empregadas podem ser analíticas— como na tese de Poincaré; difeomorfismos— como no artigo de Sternberg; ou homeomorfismos— que veremos adiante. Estas propriedades estão relacionadas ao modo como enxergamos as trajetórias. Sabemos que, em um problema de linearização, trata-se de verificar quando as soluções do sistema não-linear são equivalentes às soluções do sistema linear, mas o quer dizer "ser equivalente"? Esta afirmação é sempre relativa à existência de uma mudança de coordenadas e esta transformação ser analítica, diferenciável ou apenas contínua, estabelece a natureza das propriedades que enxergamos no conjunto de soluções.

Sternberg faz questão de ressaltar, no artigo de 1955, que o problema de formas normais para contrações teria uma natureza completamente diversa caso não

[6]Mais precisamente são grupos de germes de transformações.
[7]Dizemos hoje o fluxo no tempo um.

estivéssemos assumindo nenhuma condição de diferenciabilidade. Isto porque, dados dois homeomorfismos contrativos M e N definidos em uma vizinhança da origem, podemos, sob certas condições[8], garantir que existe um homeomorfismo R, definido na vizinhança da origem e mantendo-a fixa, tal que $RMR^{-1} = N$. Esta transformação R é uma conjugação entre M e N e a existência desta conjugação quer dizer que duas contrações quaisquer são equivalentes, na vizinhança da origem. Se buscamos formar classes de transformações equivalentes, neste caso elas podem ser agrupadas em apenas uma classe.

Deixemos um pouco Sternberg de lado para falar de um outro aluno de Aurel Winter, a saber, Philip Hartman. Os leitores familiarizados com a teoria dos sistemas dinâmicos o identificarão imediatamente ao teorema de Grobman-Hartman, demonstrado independentemente, com provas distintas, por Hartman e por Grobman, um matemático soviético. Em um significativo trabalho publicado em 1960 (HARTMAN, 1960b), apresentado em um simpósio sobre equações diferenciais realizado no México no ano anterior, o autor retoma o problema da linearização quando os autovalores têm parte real negativa; a perturbação é de classe C^2; e a mudança de coordenadas é de classe C^1; mas nenhuma condição de não-ressonância é exigida. A resposta é que, em dimensão n, só há resposta afirmativa para o caso de contrações e o resultado não pode ser estendido sem que sejam impostas restrições adicionais sobre os autovalores. O exemplo seguinte, mencionado por Hartman, tem especial importância para nós:

Seja o sistema diferencial analítico de três equações

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha x \\
y' &= (\alpha - \gamma)y + xz \\
z' &= -\gamma z,
\end{aligned}
$$

onde $\alpha > \gamma > 0$.

Este sistema não admite uma linearização local de classe C^1. Isto é, não existe transformação local C^1, com jacobiano não nulo, que leve as trajetórias do sistema acima nas trajetórias do sistema:

[8]Se o problema é definido em dimensão n, a condição mencionada diz respeito a exigência de uma propriedade do grupo de homeomorfismos da esfera de dimensão $(n-1)$.

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u \\ v' &= (\alpha - \gamma)v \\ w' &= -\gamma w. \end{aligned}$$

Tal exemplo é seguido pela afirmação: "Isto responde a uma pergunta colocada por M. Peixoto"(HARTMAN, 1960b, p. 221). Hartman, neste artigo, não cita nenhum trabalho de Peixoto, mas soubemos por este último[9] como tal discussão se deu em Baltimore, escola que ambos freqüentavam neste período, que pode ser considerada um desdobramento da escola de equações diferenciais que havia sido fundada por Lefschetz nos Estados Unidos após a Segunda Guerra Mundial[10]. Lefschetz havia traduzido os trabalhos soviéticos do russo e introduzido algumas de suas idéias no Ocidente, em particular aquela que é conhecida hoje como *estabilidade estrutural*. Dedicaremos um capítulo a esta noção mas é necessário dizer, neste momento, que a questão é saber se a perturbação de um sistema ocasiona mudanças significativas no sistema original ou transforma-o em um sistema que pode ser considerado equivalente. Esta abordagem propõe que a noção de equivalência usada seja um homeomorfismo.

O nome *homeomorfismo* foi introduzido pelo próprio Poincaré, em seu célebre artigo sobre a *Analysis Situs*, para designar uma transformação bijetiva e bicontínua. Para criar as novas ferramentas aí contidas, ele foi inspirado pela análise qualitativa das equações diferenciais em dimensões superiores, que o forçava a substituir a geometria que havia sido empregada com sucesso em dimensões baixas.

Nos resultados comentados até aqui procuramos mudanças de coordenadas diferenciáveis que linearizem o sistema. No exemplo de Hartman, que responde a uma pergunta de Peixoto, chegamos a uma conclusão negativa, se exigimos que a mudança de coordenadas seja diferenciável, o que nos sugere a pergunta: e se exigirmos apenas que esta transformação seja contínua?

O próximo artigo de Hartman sobre o tema chama-se "*A lemma in the theory of structural stability of differential equations*" (HARTMAN, 1960a) e nele é publicada uma primeira versão do resultado que conhecemos hoje por teorema de Grobman-Hartman. O novo enunciado tem aproximadamente a seguinte forma:

[9]Comunicação pessoal (PEIXOTO, 2000).

[10]Ver A. Dahan-Dalmedico: "*La renaissance des systèmes dynamiques aux États-Unis après la deuxième guerre mondiale— l'action de Solomon Lefschetz*"(DAHAN DALMEDICO, 1994).

Seja o sistema de equações diferenciais não-lineares, autônomas e reais $x' = Lx + F(x)$, onde $F(x)$ é uma função diferenciável[11] em uma vizinhança de x, e L é uma matriz com autovalores $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, que possuem parte real diferente de zero[12]. L é a parte linear do sistema e F pode ser vista como uma perturbação do sistema linear que pretendemos, de fato, desprezar.

Lembramos que na tese de Poincaré o problema de linearização foi formulado do seguinte modo: temos um sistema não-linear que será expandido em uma série da qual tomaremos os termos de primeira ordem (parte linear do sistema). O enunciado que extraímos do artigo de Hartman é absolutamente equivalente, mas partimos do sistema não-linear já expresso como uma perturbação de uma sistema linear.

Hartman prossegue mencionando Peixoto mais uma vez, para observar que este último levantou a questão de saber se existe um "mapa topológico" (homeomorfismo) R, transformando a variável x em uma outra variável u, definido em uma vizinhança da origem tal que as soluções do sistema de equações não-lineares original são levadas nas soluções do sistema de equações diferenciais lineares $u' = Lu$. A questão é respondida afirmativamente por Hartman para o caso em que F é de classe C^2 e, em um artigo posterior, (HARTMAN, 1963), se F é de classe C^1, onde é empregado um procedimento distinto.

O homeomorfismo procurado será na verdade uma conjugação entre as soluções do sistema linear e do sistema não linear (visto como uma perturbação do sistema linear). Ora, temos assim uma formulação definitiva do problema de linearização como um problema de conjugação o que ainda não estava claro nos primeiros trabalhos sobre o assunto. Descrevemos como, desde o artigo de Siegel, o enunciado ganha uma visão mais geral, a partir da teoria dos grupos, como a procura de formas normais, mas que está, de fato, para além do problema de linearização. Desde Sternberg, no entanto, o problema da linearização vai se tornando mais preciso, podendo ser encarado indistintamente como um problema de aproximação linear, um problema de conjugação e um problema de perturbação. Dizer isto hoje, pode parecer uma obviedade, contudo, procuramos mostrar que, do ponto de vista histórico, esta visão

[11]Na verdade, com um certo grau de diferenciabilidade.

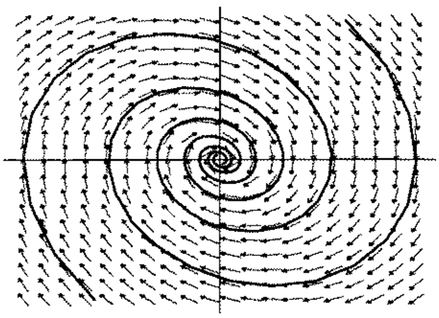
[12]Note-se que esta condição é mais fraca que a condição sobre os autovalores exigida no teorema de Sternberg, que é a terceira hipótese da tese de Poincaré.

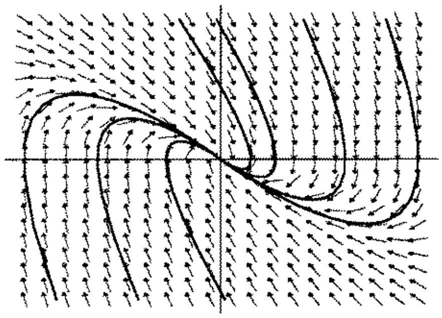
foi construída aos poucos, a partir de influências diversas.

Conforme mencionamos anteriormente, o resultado de Hartman foi demonstrado independentemente pelo matemático soviético Grobman ((GROBMAN, 1959) e (GROBMAN, 1962)). Outro soviético, o matemático Anosov(ANOSOV, 1986), de quem falaremos mais tarde, afirma que nem o objetivo de Grobman nem o de Hartman era demonstrar um teorema de estabilidade estrutural, mas apenas responder a uma pergunta sobre a possibilidade de se linearizar um sistema na vizinhança de seus pontos de equilíbrio. É verdade que matematicamente a linearização local é um caso tão particular de problema de estabilidade estrutural, que não haveria grande interesse em colocá-lo dessa maneira. No entanto, vimos que Hartman menciona explicitamente a pergunta sobre a estabilidade estrutural em seus trabalhos e, do ponto de vista histórico, parece interessante assinalar essa influência.

Não é questão, entretanto, falar da estabilidade estrutural neste capítulo, mas da proposição do problema de linearização, onde a transformação que lineariza pode ser tomada como um difeomorfismo ou um homeomorfismo. Um exemplo poderá nos facilitar a compreender a diferença entre os dois casos.

Sejam dois sistemas bidimensionais cujas soluções possuem respectivamente as formas desenhadas abaixo, que correspondem a uma singularidade de tipo foco e outra de tipo nó:





Para o teorema de Sternberg estes espaços de fase são essencialmente distintos, pois a transformação que leva um no outro não pode ser diferenciável. Para vermos isto, basta pensar que o sistema representado é um pêndulo amortecido, próximo de um ponto de equilíbrio estável, cuja equação é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = y \\ \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\omega^2 \operatorname{sen}(x) - \rho y \end{cases}$$

Se o valor de ρ, que é a constante de amortecimento, é pequeno, temos que a origem é um foco; e se é grande, temos um nó do sistema linearizado, representado na figura. O que significa que, se ρ é pequeno, o pêndulo irá se aproximar da posição de equilíbrio, produzindo oscilações cada vez menores, enquanto, no outro caso, ele segue uma direção de aproximação assintótica. Esta informação diz respeito não apenas às posições do pêndulo quando ele está próximo da posição de equilíbrio, mas também à sua velocidade. Sabemos que a velocidade faz parte da estrutura diferencial de um sistema, que só teria chances de ser mantida por uma transformação diferenciável que preserva propriedades métricas.

Visando as idéias que serão exploradas na próxima seção, onde falaremos de classes de equivalência, salientamos que a equivalência via homeomorfismo não diferencia os casos do desenho. Ambos os casos representam absolutamente a mesma coisa, uma vez que podem ser levados um no outro por um homeomorfismo. Os possíveis desenhos bidimensionais que Poincaré e Joukovsky descreveram seriam reduzidos a apenas três casos, uma vez que o conjunto das trajetórias que espiralam para a origem e o daquelas que se aproximam por retas podem ser levados um no outro por um homeomorfismo. À descrição por uma transformação contínua interessam outras propriedades como o fato de que, se o pêndulo se encontra em sua posição de equilíbrio, e fazemos com que ele sofra uma pequena perturbação, em ambos os casos ele retornará à posição original, isto é, as soluções na vizinhança se aproximam da posição de equilíbrio e este equilíbrio é estável. Obviamente, se for válido o teorema de Sternberg, teremos também esta informação, isto é, o teorema de Sternberg diz mais coisas que o teorema topológico. No entanto, ele necessita de condições mais fortes e, independentemente do resultado diferenciável, há outras informações importantes a serem extraídas. O teorema de Grobman-Hartman agrupa mais objetos, fazendo-nos ver os aspectos qualitativos do comportamento do sistema[13].

[13]Na verdade este resultado é mais forte que a simples identificação de uma situação não-linear com sua aproximação linear a menos de um homeomorfismo. Isto porque este homeomorfismo é uma

Pode parecer que estamos diante de uma questão puramente técnica, mas nosso objetivo neste capítulo é defender o contrário. Há uma diferença importante entre os dois pontos de vista, que diz respeito ao sentido do conhecimento de um objeto matemático. O que é conhecer um objeto a menos de uma transformação? Qual a diferença entre conhecer a menos de um difeomorfismo e conhecer a menos de um homeomorfismo? Queremos saber o que pode significar conhecer em matemática. Mais que isso, ressaltamos que a matemática inventa seus modos de conhecer sob as condições de possibilidade de um certo enunciado[14].

A separação entre a linearização diferenciável ou contínua teria muito menos importância se nos posicionássemos em um referencial interior à matemática. Nesta disciplina, às vezes, chamamos um difeomorfismo, às vezes, de homeomorfismo diferenciável, ou de certa classe de diferenciabilidade. Portanto, não estamos falando de objetos matemáticos distintos, mas de processos de invenção matemática historicamente localizados, que encerram questões distintas. Partindo de uma inversão dos resultados, optando pela ordem histórica, desejamos criar condições para que venha à tona, do interior mesmo da matemática, o seu pensamento. Este é exatamente o movimento que, no nosso trabalho, irá possibilitar uma aproximação com a filosofia.

2.2 Conhecer topologicamente

Começaremos por dar um exemplo de classificação topológica— realizada por meio de um homeomorfismo. Em topologia, classificamos as superfícies de um certo tipo pelo número de buracos que elas possuem. Este número é chamado *gênero*, ou *genus*, da superfície: a esfera é uma superfície de gênero zero e o toro tem gênero um. Podemos, então, classificar as superfícies compactas orientáveis, dizendo que elas são sempre topologicamente equivalentes a uma esfera ou a um toro ou a um bi-toro ou a um tri-toro, e assim por diante. Isto quer dizer que, tomando-se uma superfície qualquer que satisfaça às condições, uma xícara por exemplo, ela terá que se encaixar em uma das classes que, neste exemplo, seria a classe dos toros, visto

perturbação da identidade.

[14]Claro que tais definições também podem ser influenciadas por demandas externas, que visam às aplicações, por exemplo. Este caso será comentado apenas na segunda parte, pois aqui nos contentamos em falar da dinâmica interna.

que toda xícara possui uma alça. Conhecemos assim, do ponto de vista topológico, toda e qualquer superfície compacta orientável. É preciso frisar ainda que quando classificamos *do ponto de vista topológico* queremos dizer que a classificação é válida a menos de um homeomorfismo, isto é, que há sempre uma transformação contínua, com inversa contínua, entre objetos da mesma classe; esclarecemos ainda que dois objetos são homeomorfos se podemos transformar um no outro sem quebrá-los ou esgarçá-los. Uma propriedade topológica é uma propriedade que é invariante por um homeomorfismo qualquer.

A existência desta transformação define quando os objetos são equivalentes e podem integrar uma mesma classe que, por motivos óbvios, será chamada de *classe de equivalência*. O número de classes indica o número de objetos que consideramos distintos, visto que, se dois objetos estão em uma mesma classe, eles são considerados o mesmo objeto. Podemos formar classes com outros tipos de transformação, desde que elas permitam que arrumemos um número interessante de objetos em uma mesma classe. Obviamente uma classificação em que haja apenas um objeto por classe não seria *interessante* do ponto de vista matemático. A propriedade que os objetos possuem de se deixarem dispor em uma classe depende, no entanto, das transformações que utilizamos como noção de equivalência. Enfocaremos assim, no próximo parágrafo, as propriedades destas transformações em si mesmas.

Já dissemos que certas transformações podem formar um grupo. Constituir um grupo de transformações significa que podemos nos liberar das especificidades de cada transformação para estudar o que elas têm em comum. Podemos até dizer que lidamos com a essência de tais transformações, se não tomamos a palavra *essência* no sentido de um absoluto, mas como algo inseparável do problema onde tais transformações estão sendo introduzidas. Dissemos também que o conjunto de homeomorfismos locais definidos em uma mesma vizinhança de um ponto dado, mantido fixo, pode formar um grupo. O ponto de vista dos grupos de transformações possibilita definir o campo de atividade de um certo domínio da matemática, como no programa de Félix Klein, quando este enunciou que as diferentes geometrias podem ser definidas como o estudo de invariantes de certos grupos de transformações. Assim, a geometria euclidiana, por exemplo, é definida como o estudo das propriedades de figuras que são invariantes por isometrias; a geometria projetiva, por sua vez, estuda os invariantes de transformações projetivas; e a topologia, como vimos, os invariantes por homeomorfismos. O próprio Poincaré, em um tempo onde a teoria dos grupos ainda não ocupava um lugar privilegiado na matemática, ousou dizer que, não apenas o objeto da geometria é o estudo de um grupo particular mas o "conceito geral de grupo preexiste em nosso espírito ao menos em potência"(POINCARÉ, 1918, p.93). Ele queria dizer que o conceito de grupo é uma das formas do entendimento, constituindo um *a priori* no sentido kantiano do termo.

As breves considerações que acabamos de fazer sobre a topologia e a teoria dos grupos tocam em questões que já foram muito exploradas do ponto de vista histórico e epistemológico. Mencionamo-nas apenas para destacar o quanto tocamos em assuntos conceitualmente densos ao falar de um problema de classificação relativo às equações diferenciais. Voltando então a estas equações diferenciais, falamos, no primeiro capítulo, do modo como Poincaré *resolve* o problema das equações lineares identificando as propriedades da função que devem permanecer inalteradas por certas substituições que formam um grupo descontínuo. Ele ressalta que uma tal solução pode ser mais satisfatória que o conhecimento explícito de séries que, por sua vez, podem dizer muito pouco sobre as soluções. Partimos então de uma equação diferencial e tentamos compreender a natureza íntima de suas soluções, identificando as propriedades que são invariantes. Quais? Sob que tipo de transformação? As propriedades que gostaríamos de manter inalteradas dependem da pergunta que fazemos sobre a solução da equação. Que tipo de caracterização desta solução consideramos *resolver* o problema? Já vimos a novidade introduzida por Poincaré com relação aos antigos procedimentos.

No caso de nosso problema de linearização, os teoremas de Sternberg e de Grobman-Hartman fazem perguntas diferentes. No primeiro, devem ser mantidas as propriedades diferenciáveis que se relacionam à estrutura do conjunto das soluções, enquanto os invariantes topológicos do segundo exprimem propriedades de situação, isto é, propriedades relativas a como as trajetórias se *situam* umas em relação às outras.

Sabendo qual a natureza das propriedades que queremos manter invariantes, escolhemos uma noção de equivalência. Uma noção de equivalência define matematicamente quando dois objetos são parecidos, ou melhor, "iguais". Classificar é agrupar objetos em uma mesma classe se os consideramos "iguais" do ponto de vista de certas propriedades que pretendemos salientar.

No exemplo que estudamos, o problema da linearização era visto, no início, como um problema de *aproximação* que, como o próprio nome diz, investiga quando um sistema pode ser aproximado por um outro. Em seguida, a partir da noção de conjugação, passamos a considerar que os conjuntos de soluções de dois sistemas são os "mesmos" se existe uma tal conjugação- que traduz uma noção de equivalência entre dois conjuntos de soluções. Isto nos permite fazer uma classificação dos casos de solução e sabemos que as classificações serão distintas dependendo do fato de usarmos um difeomorfismo ou um homeomorfismo como noção de equivalência. Mas podemos afirmar também que: *dada uma noção de equivalência, investigamos as propriedades que ela mantém invariantes.* Defendemos que ambos os procedimentos se fazem ao mesmo tempo e não nos interessa saber o que vem em primeiro lugar; as propriedades invariantes e as transformações que as deixam invariantes se determinam reciprocamente.

2.3 Conjugação e classificação

Vimos que podemos não estudar as transformações individualmente, mas os grupos de transformações, o que nos permite negligenciar as particularidades de cada transformação para guardar apenas o essencial. Poincaré dizia que a matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes e que, entre as palavras que exerceram uma feliz influência estão *invariante* e *grupo* (POINCARÉ, 1908c, p. 32), palavras que nos fizeram perceber a essência de muitos procedimentos matemáticos.

O problema de se linearizar localmente uma equação diferencial é reduzido ao problema de se encontrar equivalências para as trajetórias destas equações diferenciais, na vizinhança de uma singularidade. Mas vimos que estas trajetórias podem ser enxergadas como órbitas da ação de certos grupos no espaço onde a equação é definida; no nosso caso, um espaço euclidiano de dimensão n.

Podemos enxergar as possibilidades de linearização a partir da estrutura dos grupos de transformações formados por transformações locais C^k definidas em um espaço E. Em um grupo de transformações, para que duas transformações T_1 e T_2 pertençam a uma mesma classe, deve existir uma transformação H, pertencente ao grupo, chamada conjugação tal que $HT_1H^{-1} = T_2$, isto é, o diagrama abaixo comuta. Este foi o modo como definimos a equivalência entre duas transformações. Já mencionamos que os homeomorfismos locais contrativos, dada uma condição adicional, formam uma classe.

$$\begin{array}{ccccc} & E & \xrightarrow{T_1} & E & \\ H & \downarrow & & \downarrow & H \\ & E & \xrightarrow{T_2} & E & \end{array}$$

Podemos formular o problema da linearização como o estudo do grupo de transformações associados ao sistema linear $u' = Lu$. Mas o sistema linear é definido pela derivada da função original na vizinhança da singularidade[15]. Dado o fluxo de uma equação diferencial, queremos saber, na vizinhança de um ponto singular, quando sua dinâmica é *determinada* pela dinâmica de sua derivada. Isto é equivalente a estudar o grupo das transformações locais no espaço euclidiano.

Olhando para o grupo de transformações C^1, se há uma transformação H conjugando duas transformações D_1 e D_2, devemos ter, obrigatoriamente, na vizinhança de um ponto p onde $D_1(p) = 0$, que DH conjuga as transformações lineares derivadas de D_1 e D_2. Mas para isto, as transformações derivadas devem ter o mesmo espectro, isto é[16], os mesmos autovalores e, do ponto de vista linear, as transformações que queríamos conjugar são as mesmas[17]. Deste ponto de vista, só podem ser considerados *parecidas*, ou "iguais" no ponto de vista de classes de equivalência, as transformações que possuem a mesma parte linear, isto é, onde as partes lineares são realmente iguais, no sentido usual. Isto exclui qualquer possibilidade de uma perturbação sobre a parte linear se *parecer* com o sistema linear correspondente, pois a noção de equivalência empregada é excessivamente rígida.

[15] Lembremos que relaxamos a condição de diferenciabilidade da linearização, mas não do sistema original que é suposto diferenciável.

[16] Como estamos falando de domínios finitos.

[17] Existe na verdade um homomorfismo do grupo de transformações C^1 no grupo das matrizes não singulares que envia uma transformação em sua aplicação linear tangente. Uma forma normal conveniente para esta aplicação tangente, também o será para a transformação.

Vimos que, se nos restringimos às contrações, admitindo a terceira hipótese da tese de Poincaré, que é uma condição formal sobre os autovalores, Sternberg demonstrou que a linearização é possível. Se esquecemos esta condição formal, Sternberg demonstrou que temos ainda uma forma normal, mesmo que não linear. Na verdade, estamos perguntando formalmente quando podemos parar em um certo momento, termo de ordem um ou de ordem superior finita, da expansão em série de uma solução e garantir que tal aproximação expressa realmente a solução que procuramos. Sabemos que o grupo de germes de contrações é infinito mas ele possui uma rigidez tal que permite (dadas certas condições) que seus elementos sejam aproximados (por conjugação) por polinômios de ordem finita (que formam um grupo de dimensão finita). Esta rigidez está mais uma vez associada a uma propriedade que lembra a facilidade de extensão das funções algébricas, tal como as comentamos no primeiro capítulo. O grupo de polinômios é algébrico e o que dissemos antes é que o que se passa sobre um grupo algébrico determina o que se passa sobre o grupo das contrações. É interessante citar a forma como tal fato foi expressado por Marc Chaperon[18]: neste universo, a rigidez nos permite dizer que as coisas que são verdadeiras em um grupo algébrico são VERDADEIRAS. A parte linear *determina* a dinâmica em um sentido rígido, análogo ao sentido algébrico que comentamos brevemente no primeiro capítulo.

Em um grupo de transformações diferenciáveis não contrativas isto não se passa da mesma maneira e, mais uma vez, devemos penetrar passo a passo neste universo, tomando uma hipótese a cada vez, que nos restrinja a grupos menos rígidos que o das contrações, mas com estruturas fortes. Daremos outros exemplos de trabalhos do próprio Sternberg, onde ele passa a considerar transformações C^∞. Ele mostra (STERNBERG, 1959) que no grupo das transformações locais que preservam volume, os germes das suas formas normais estão em um número finito de classes. Ainda neste artigo é demonstrado que o conjunto de formas normais é uma sub-álgebra maximal comutativa do conjunto das álgebras de todos os campos de vetores locais como a sub-álgebra de Cartan em relação a uma álgebra de dimensão finita[19]. A condição formal, análoga à terceira hipótese da tese de Poincaré, é uma condição de regularidade desta

[18]Comunicação pessoal.

[19]Associando-se a este resultado citamos os nomes de Moser e Siegel.

álgebra[20].

No teorema de Grobman-Hartman, esquecemos esta condição de não ressonância entre os autovalores, passando a exigir apenas que os autovalores da parte linear não estejam no círculo unitário. Já comentamos que a singularidade de tipo *centro* é bastante sensível a perturbações e o que estamos fazendo aqui é excluir este caso, que pode nos causar problemas, para considerar apenas os casos mais estáveis. No caso aqui considerado, dizemos que o sistema é hiperbólico na vizinhança considerada e voltaremos a falar desta nomenclatura no quarto capítulo. Podemos dizer então que, no caso hiperbólico local, a dinâmica da derivada *determina* a dinâmica. Na verdade, este teorema não classifica as dinâmicas locais possíveis mas afirma que, para isto, basta classificar os isomorfismos lineares[21]. Quando falamos na *determinação* da dinâmica, vimos que *determinar* neste caso é determinar topologicamente, determinar a menos de um homeomorfismo. São as perguntas que fazemos sobre as soluções das equações diferenciais que *convocam* a topologia. O modo de dizer que duas situações são parecidas é, neste caso, topológico. A topologia que, conforme mencionamos, nasceu para resolver problemas de passagem do local ao global, é introduzida aqui em um problema local, associada a uma propriedade global dos grupos de transformações locais. Há uma espécie de não-linearidade do problema que exige transformações mais flexíveis, como é o caso dos homeomorfismos. Não-linearidade que não é a do sistema original, mas a da própria linearização.

Temos duas transformações dadas por dois fluxos (onde um é parte linear do outro) e a linearização é uma transformação de transformações. No diagrama de conjugação que desenhamos acima, se T_1 e T_2 são as transformações, isto que chamamos de "transformação de transformações" é aquela que incide verticalmente no diagrama. Vimos que esta pode ser um difeomorfismo, que é uma transformação infinitesimalmente linear, ou um homeomorfismo, que é apenas contínuo. O que dissemos acima é que o problema local de passagem do não-linear ao linear não é, em geral, um problema linear e as linearizações diferenciáveis exigem uma rigidez muito maior que as linearizações contínuas.

[20]Ele continuará discutindo os grupos de séries formais de potências em um trabalho apresentado no já citado congresso do México sobre equações diferenciais realizado em 1959.

[21]No caso de eles serem hiperbólicos.

Terminaremos com algumas palavras sobre as demonstrações do teorema de Grobman-Hartman usadas atualmente. A demonstração original aplicava um método de aproximações sucessivas e precisava de um resultado sobre a existência das variedades estáveis e instáveis que definiremos no quarto capítulo. A condição de hiperbolicidade é importante justamente por permitir a decomposição da dinâmica neste dois subespaços, estável e instável.

Uma outra demonstração, que ficou mais conhecida, foi proposta por Charles Pugh(PUGH, 1969). Falaremos mais adiante de um difeomorfismo do toro que possui propriedades especiais e cuja generalização constituiu os difeomorfismos de Anosov. Moser provou que o primeiro difeomorfismo é *estruturalmente estável* e Abraham e Mather generalizaram o resultado para todo difeomorfismo, ou fluxo, de Anosov. Em relação ao teorema de Grobman-Hartman, o que Pugh fez foi perceber que sua demonstração pode ser feita a partir das técnicas usadas por Moser, sem necessidade da existência das variedades invariantes e fazendo ver a unicidade do homeomorfismo linearizante[22].

Se admitimos a existência das variedades invariantes, uma outra demonstração do teorema de Grobman-Hartman foi elaborada por Jacob Palis(PALIS, 1969a) e publicada no mesmo ano do artigo de Pugh. Este resultado encontra-se em sua tese que vem demonstrar, na verdade, um teorema muito mais forte, do qual falaremos na segunda parte, que é a estabilidade estrutural dos sistemas Morse-Smale. Sobre o teorema que analisamos neste capítulo, Palis mostra que a sua prova está relacionada a este problema. Trata-se de uma demonstração com forte apelo geométrico, que deixa mais claro o papel da decomposição da dinâmica.

Observamos como o teorema de Grobman-Hartman vem se encaixar no contexto dos problemas de estabilidade estrutural. As duas demonstrações mais recentes, a de Palis e de Pugh, fazem-nos enxergar propriedades geométricas, encadeamentos de necessidades e relações com outros problemas que a demonstração original, mesmo sendo verdadeira, deixava ocultos. É neste sentido que podemos afirmar que estas demonstrações são mais elegantes, o que é uma freqüente preocupação da matemática.

[22] A demonstração citada vale também para espaços de Banach. Indicamos para este resultado o próprio artigo de Pugh e um artigo de Palis (PALIS, 1969b).

2.4 Esculpindo verdades...

Um grande matemático do século XIX, Lejeune-Dirichlet, afirmou que o espírito da matemática moderna é o de substituir as idéias ao cálculo[23]. Um exemplo seria a utilização aqui das noções de invariantes por transformações e grupos de transformações. Mencionamos que Poincaré chegou a incluir a noção de grupo entre as noções *a priori* do entendimento. Não iríamos tão longe, mas podemos afirmar seguramente que se trata de uma definição que dispensa a referência a um certo objeto para focalizar um procedimento conceitual, que tem a ver com o conhecimento de uma verdade. Mas o que chamamos de verdade não se refere tampouco a um referencial exterior que seja transcendente. Não se tratam de verdades *a priori*, mas de novos problemas, ou melhor, de novas maneiras de se problematizar antigas situações, o que faz a matemática avançar.

Procuramos destacar a tensão essencial que perpassa um momento de invenção em matemática. Para conhecer localmente as soluções de equações diferenciais desejamos saber, de modo um pouco mais geral, quando a parte linear de uma transformação *determina* tal transformação. Mas *determinar*, pode ter sentidos diferentes, associados ao que consideramos suficiente para se *conhecer* o comportamento das soluções. Por um lado, temos uma abertura infinita e liberdade de criação, sendo-nos possível mesmo estabelecer que sentido estamos dando à palavra *conhecer* quanto ao conhecimento de algo. Procedimento que fará nascer uma pergunta. Mas, a partir de tais perguntas, obtemos respostas inesperadas, que parecem vir do interior da própria matemática, fazendo com que o processo pareça mais uma descoberta— vimos que as condições do teorema (interpretáveis em termos das propriedades dos grupos das transformações que usamos na linearização) *determinam*, de modo necessário desta vez, o tipo de equivalência que empregamos. Isto é, o encadeamento das novas verdades às condições que o determinam não se dá de modo arbitrário, mas é ligado por um tipo de necessidade. Insistimos que *abertura* e *necessidade* são ingredientes fundamentais em um momento de criação.

O encadeamento necessário se dá nas duas direções, ou melhor, nos dois sentidos. A isto chamamos determinação recíproca de verdades combinadas. Aqui divergimos

[23]Ver (BRUNSCHVICG, 1922, p.339).

de Platão, quando este privilegia o sentido descendente da determinação das verdades em matemática: dos primeiros princípios às suas conseqüências. É claro que isto faz sentido se pensamos nos axiomas fundamentais da matemática, no entanto, no processo cotidiano de invenção, vimos que as verdades vão aparecendo da tensão produzida por novas condições, condições que podem ser desprezadas ou transformadas pela força de novas perguntas. Algo como em um trabalho em barro, onde esculpimos a matéria a partir da resistência que ela oferece, torneamos estas verdades matemáticas a partir de condições que oferecem resistências e relaxamos aos poucos, para introduzir novas condições que, oferecendo uma nova resistência, fará com que uma verdade apareça. Mesmo no processo onde certas verdades são suplantadas por outras, elas mantêm entre si uma relação de necessidade, podendo fazer aparecer, ao final, um diagrama de equivalências estruturais que darão um aspecto final estruturado, que pode merecer o nome de *teoria*. Trata-se de um processo extremamente rico, que infelizmente a maioria dos textos matemáticos mascara quando reverte a ordem da criação. Temos a impressão de que os textos matemáticos são escritos de trás pra frente, escrevemos primeiro o que descobrimos por último: a ordem lógica. Como diz Léon Brunschvicg (BRUNSCHVICG, 1922), compreendemos porque a filosofia da matemática baseada na lógica, falhou em relação ao problema da verdade ao supor uma inversão de sentido entre a ordem da invenção e a ordem lógica da exposição, admitindo implicitamente que a preocupação com o rigor é estrangeira à invenção. A forma que a exposição lógica adquire não é independente da matéria com a qual lidamos. Continuaremos a investigar de que matéria matemática falamos— se não a identificamos a uma realidade exterior nem sensível nem transcendente— e para isto, temos sempre necessidade de exemplos matemáticos precisos.

Capítulo 3

Miscelânea de outros problemas colocados na memória de Poincaré

Citamos a memória "*Sur les courbes définies par une équation différentielle.*

3.1 Distribuição das singularidades

Falamos anteriormente de um problema local e mencionamos uma certa dualidade entre o local e o global. Tal menção foi no entanto bastante imprecisa, uma vez que não explicitamos os problemas relativos à passagem de uma descrição local a uma descrição global. Na verdade, não há sentido falar de local e de global sem começar por precisar onde estes conceitos habitam. No capítulo anterior, *local* designava precisamente a vizinhança de uma singularidade.

O procedimento de Poincaré consistirá, em seguida, em penetrar no âmbito global do conjunto de soluções passo a passo, instaurando diferentes graus entre o local e o global. Para isto, seu primeiro passo, após a descrição da vizinhança das singularidades, será investigar como tais singularidades se distribuem pelo domínio.

No caso bidimensional, Poincaré estuda as soluções projetadas sobre uma esfera, e o primeiro resultado não local a ser demonstrado já indica toda a novidade de sua abordagem: todo sistema de características (soluções) admite pontos singulares. Dissemos que o novo ponto de vista de Poincaré se caracteriza por encarar as soluções em seu conjunto e temos aqui um teorema de existência, cujo objetivo se distingue radicalmente da descrição individual das soluções obtida pelos métodos tradicionais de solução das equações diferenciais.

Na primeira parte do artigo "*Sur les courbes...*", que concerne às definições, Poincaré começava por definir um *ciclo* e um *policiclo*. A importância de começar seu estudo pelos ciclos vem do fato de que já se conhecia um resultado (conhecido hoje como *teorema de Jordan*), afirmando que todo ciclo separa a esfera em duas regiões, uma interior e outra exterior ao ciclo. Esta possibilidade permite definir a orientação de um ciclo: ele é positivamente orientado se, percorrendo-o no sentido de sua orientação, seu interior está à sua esquerda e negativamente orientado no caso contrário.

Estabelecer a orientação é fundamental para se definir o *índice* de uma singularidade, definição que é empregada por Poincaré no estudo do que ele denomina *distribuição das singularidades*, e é definida como segue:

Seja p uma singularidade isolada no interior de um ciclo C, orientado positivamente. Percorramos C no sentido de sua orientação até retornar ao ponto de partida. Em cada ponto do percurso há um vetor do campo de vetores, e o índice da singularidade p é o número de voltas positivas que estes vetores realizam enquanto damos uma volta sobre C. Já se trata de uma propriedade local de caráter topológico[1]. Poincaré irá demonstrar, então, que para qualquer campo de vetores definido sobre a esfera, o número de suas singularidades de tipo *nó* e de tipo *foco*, somadas, supera o número de *colos* de duas unidades[2].

Tendo estudado os campos de vetores definidos no plano, a partir de uma projeção sobre a esfera, podemos adaptar tal estudo para superfícies no espaço. Se esta superfície possui um plano tangente que varia continuamente, o estudo de campos contínuos de vetores tangentes à superfície nos permite generalizar as propriedades dos campos no plano. Quando Poincaré passa à análise das equações de grau superior as soluções estão situadas sobre uma superfície algébrica e, tomando certas precauções, ele pode supor que estas superfícies não possuem componentes infinitas e se reduzem a um certo número de componentes fechadas. Tomando, então, uma destas componentes, uma superfície S, ele utiliza o *genus* p desta superfície para generalizar a relação entre os pontos singulares encontrada sobre a esfera:

[1]A topologia não surgiu com Poincaré e a utilização do teorema de Jordan é um exemplo disto. No entanto, como acontece em várias áreas, em se tratando deste matemático, ele dará contribuições fundamentais à topologia tal que a conhecemos hoje. Para o desenvolvimento da topologia antes de Poincaré, ver *La topologie algébrique des origines à Poincaré* (PONT, 1974).

[2]É importante lembrar que estamos considerando sempre o caso em que as singularidades são em número finito.

"Seja N o número de singularidades de tipo nó, F o número de focos e C o número de colos, para um campo de vetores qualquer definido sobre esta superfície, temos que $N + F - C = 2 - 2p$".

Mas podemos subdividir a superfície em regiões, a partir dos ciclos, e Poincaré afirma que podemos identificar as regiões da superfície assim repartida com as faces de um poliedro convexo, uma vez que "em geometria de situação, não devemos nos inquietar com a forma das faces e das arestas; não temos então necessidade de supor que as faces do poliedro são planas, e suas arestas retilíneas"(POINCARÉ, 1885a, p.121). Feito isto, o lado direito da igualdade é exatamente a característica de Euler da superfície. Este número, também chamado de característica de Euler-Poincaré, depende apenas do *genus* da superfície sendo, portanto, um invariante topológico global[3].

Podemos compreender o que queria dizer Poincaré quando afirmou que a *Analysis situs* é um ramo da geometria que descreve a situação relativa dos pontos, das linhas e das superfícies, sem nenhuma consideração das suas grandezas. Logo no início do artigo "*Sur les courbes...*" foi proposta uma imagem esclarecedora do novo modo de conceber o problema: "Se traçamos sobre a esfera um sistema de ciclos e policiclos, tal que para cada um dos pontos da esfera passa um ciclo ou um policiclo, e um só, exceto em alguns pontos singulares pelos quais não passa nenhum ciclo, nós diríamos que este sistema de ciclos é um *sistema topográfico*, porque ele é análogo ao sistema de curvas de nível de um terreno" (POINCARÉ, 1881, p.11). As singularidades por onde não passa nenhum ciclo, são análogas aos *vales* e aos *cimos* do terreno, enquanto os pontos duplos dos policiclos são análogos aos *colos*, ou *desfiladeiros*. Considerando um certo policiclo, uma parte dos vales e dos cimos está no exterior e outra parte no interior deste policiclo. Poincaré afirma então que "cada colo *distribui de uma certa maneira* os vales e os cimos do sistema"(POINCARÉ, 1881, p.12) (Grifo do autor). Ora, já está sendo pressentido aqui, a partir da analogia geográfica, que há uma relação profunda entre os diferentes tipos de singularidades, a qual determina o modo como elas se distribuem por um terreno.

Não está em jogo o número de singularidades de cada tipo mas a relação entre estas

[3]Este resultado, fundamental na topologia, vale para superfícies orientáveis compactas e tornar a superfície compacta é justamente o sentido das restrições exigidas por Poincaré.

singularidades e esta relação é determinada *a priori* por uma propriedade topológica da superfície, onde iremos definir o campo de vetores. Trata-se, do nosso ponto de vista, de um resultado bastante profundo, posto que ele relaciona seres matemáticos distintos, fazendo-nos enxergar as profundas implicações que eles mantêm entre si. Voltaremos a falar sobre este assunto ainda neste capítulo.

3.2 Teorema de Poincaré-Bendixson e ciclos limites

Após a descrição local, o objetivo de Poincaré passou a ser o de descrever o aspecto ("*allure*")[4] das soluções em toda a esfera. Poincaré enunciará, com este fim, um resultado global que é conhecido, depois de ter sido generalizado pelo matemático sueco I. Bendixson, como *teorema de Poincaré-Bendixson*.

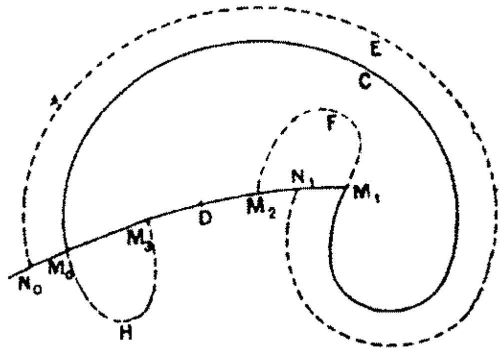
O passo inicial de Poincaré foi percorrer a extensão da esfera pelo traçado de ciclos ("*silloner la sphère par des cycles*"). Partindo da análise das interseções entre as soluções e certos arcos algébricos, chamados *arcos sem contato*, que não são soluções, mas mantêm com elas uma relação de transversalidade. O modo como as soluções irão cortar estes arcos é estudado por um método que Poincaré chama de *teoria dos conseqüentes*: dado um ponto inicial M_0, que pertence ao mesmo tempo à solução e a um arco sem contato, o conseqüente deste ponto será o próximo ponto, M_1, onde a solução intercepta o arco[5]. Na utilização deste método, Poincaré precisará admitir que as soluções dependem continuamente das condições iniciais, como dissemos no primeiro capítulo. Seja, como na figura, o arco M_0DM_1 um arco sem contato cortado por uma solução M_0CM_1. Ele afirma que, por um ponto N_0 infinitamente vizinho de M_0 (à esquerda deste), podemos traçar um arco de solução N_0EN_1, que encontra o arco sem contato em um ponto N_1 infinitamente vizinho de M_1 (também posicionado à esquerda deste último)[6].

A partir de tais métodos, inventados por Poincaré, e de propriedades das curvas

[4]A palavra do francês "*allure*" está relacionada a um *modo de andar*. O emprego desta palavra é sugestivo e, se quiséssemos explorá-lo semanticamente, poderíamos dizer que ele traz consigo uma concepção dinâmica das soluções de uma equação diferencial.

[5]Note que um ciclo é obtido quando esta transformação mantém o ponto inicial fixo.

[6]A utilização implícita da continuidade em relação às condições iniciais, neste exemplo, foi-nos informada pelo artigo de Christian Gilain(GILAIN, 1991).



algébricas que eram conhecidas na época, é possível demonstrar um primeiro resultado de classificação global para o caso bidimensional[7]: *toda solução que não tende para um nó é um ciclo ou uma espiral*[8]. Este resultado foi estendido por Bendixson, em um artigo publicado em 1901 (BENDIXSON, 1901). Uma das novas situações que aparecem no trabalho de Bendixson, deve-se ao fato de que ele deixa de lado a hipótese de que as funções que definem a equação são polinomiais[9]. Na verdade, este último trata o caso não analítico onde pode acontecer que existam infinitas soluções fechadas na vizinhança de uma singularidade, sem que *todas* as soluções nesta vizinhança sejam fechadas. Bendixson diz que, neste caso, a singularidade é do tipo centro[10] e demonstra que as soluções entre dois ciclos consecutivos devem espiralar também para tais ciclos. Ele trata ainda o caso em que as soluções tendem para um conjunto fechado composto de soluções ligando singularidades. Temos assim uma generalização da classificação em duas dimensões para o caso não analítico que é conhecida, pelos motivos citados, como *teorema de Poincaré-Bendixson*.

Poincaré prossegue a descrição global, considerando as interseções sucessivas entre uma espiral e um arco sem contato. Os pontos de interseção tendem para um limite que possui a si próprio como conseqüente, sendo portanto um ciclo chamado *ciclo limite*. Os ciclos limites são soluções da equação para os quais as outras soluções

[7]Considerando obviamente as restrições admitidas por Poincaré

[8]Lembremos que Poincaré está tratando do caso em que as singularidades são isoladas.

[9]Poincaré necessita da hipótese de que está trabalhando com X e Y sendo polinômios, pois emprega freqüentemente a teoria das curvas algébricas.

[10]Para Poincaré tínhamos um centro quando todas as soluções eram fechadas, pois, no caso polinomial, dizer que temos infinitas soluções fechadas é o mesmo que dizer que todas as soluções são fechadas.

tendem assintoticamente; salientamos que a análise local não nos deixaria prever a existência de tais ciclos. Poincaré afirmará então (teorema XVIII) que existe sempre um sistema topográfico formado de ciclos sem contato, de policiclos sem contato e de ciclos limites, que percorre (*"sillone"*) toda a superfície da esfera, e cujo conhecimento permite uma discussão completa das formas das curvas que a equação diferencial define.

Na continuação do artigo é considerada ainda a equação geral de primeira ordem $F(x, y, \frac{dy}{dx})$, onde F não é necessariamente de primeiro grau em $\frac{dy}{dx}$. Poderíamos esperar que, neste caso, resultados globais, como a existência de ciclos limites, fossem de natureza completamente diferente mas, na verdade, na maioria das vezes, estes resultados não dependem do grau da superfície mas de suas propriedades topológicas, como o *genus*, do mesmo modo que já vimos acontecer para a distribuição das singularidades. Vemos mais uma vez como a *Analysis situs* vem substituir as "verdades algébricas" nos problemas de passagem do local ao global, quando consideramos o caso geral real.

Determinando um sistema topográfico sobre a superfície, teríamos uma descrição qualitativa completa das soluções de uma equação diferencial de primeira ordem e primeiro grau. Para isto, precisamos conhecer a distribuição dos ciclos limites e se estes são em número finito. Os resultados de Poincaré e Bendixson permitem dizer que, se nenhum ciclo passa por um colo ou por um ponto singular múltiplo, então há um número finito de ciclos limites. Poincaré emprega para isto o resultado citado sobre a distribuição das singularidades, sobretudo para enunciar resultados de existência de singularidades de um certo tipo em uma determinada região. Para investigar a distribuição dos ciclos limites, ele se inspira da analogia com os procedimentos usados para se separar as raízes de uma equação algébrica.

Saber como os ciclos limites se distribuem, ou mesmo se eles são em número finito, é, na maioria dos casos, um problema não trivial. Dentre os famosos "Problemas futuros da matemática" apresentados no Congresso Internacional dos Matemáticos do ano de 1900, David Hilbert afirma que o seguinte desdobramento do décimo sexto problema é importante para a topologia das famílias de curvas definidas pelas equações diferenciais: "determinar o número máximo e a situação relativa dos *ciclos limites* de M.Poincaré no caso de uma equação diferencial de primeira ordem e de primeiro grau da forma $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{Y}{X}$ onde X e Y designam funções racionais inteiras de grau n, de x,y"(HILBERT, 1900, p.97).

H. Dulac, em 1923(DULAC, 1923), retoma os trabalhos de Poincaré e Bendixson, provando que há um número finito de ciclos limites, se supomos que as soluções consideradas estão em uma região tal que, na vizinhança de todo ponto desta região, X e Y são funções holomorfas. Se uma solução está próxima de um colo, este autor começa por estudar o prolongamento de uma solução para além desta singularidade. As soluções que tendem para uma singularidade de modo que elas possam ser prolongadas, já identificadas por Bendixson, são chamadas *separatrizes* neste artigo de Dulac e são importantes por dividir o domínio em setores, como havia sido proposto por Bendixson. Dulac define, então, um *setor repulsivo* se, seguindo um ponto do setor por uma solução, nos aproximamos primeiro da singularidade para em seguida nos afastarmos, de modo a sair do setor. Se todas as soluções tendem para a singularidade, temos um *setor atrativo* ou *nodal*.

Mesmo se os métodos empregados por Dulac não são, de modo algum, desinteressantes, sua demonstração de que um campo de vetores polinomial no plano tem um número finito de ciclos limites estava incorreta. Isto só foi descoberto nos anos setenta, e o resultado foi formulado como conjectura, a partir do trabalho de vários matemáticos que demonstraram partes importantes. Dentre estes, citamos uma série de artigos de um grupo de matemáticos franceses como (ÉCALLE *et al.*, 1987) e (MOUSSU, 1985). A partir do conhecimento do problema e destes resultados comunicados pelos autores, J.-C. Yoccoz iria se debruçar sobre o problema, publicando, em 1987, um artigo chamado "*Non-accumulation de cycles limites*"(YOCCOZ, 1987)[11], onde ele demonstra, entre outras coisas, que um policiclo não pode ser limite de ciclos limites. Este seria o único caso a impedir a finitude, uma vez que, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, se folheamos uma região por ciclos limites (isolados porque o campo é analítico), estes só poderiam se acumular em um policiclo.

Voltando ao trabalho de Poincaré, já dissemos que a importância dos ciclos limites se deve ao fato de que, conhecer o modo como eles se repartem sobre o domínio,

[11]Este era também o nome dos artigos de Écalle e outros, apresentados no Séminaire Bourbaki.

significa, ao mesmo tempo, descrever qualitativamente as soluções que estão nas suas vizinhanças e que tendem assintoticamente para tais ciclos, o que, juntamente com o teorema de classificação global (Poincaré-Bendixson), nos ofereceria um quadro qualitativo global das soluções. Poincaré utiliza o exemplo de um ponto móvel que se move segundo leis definidas por uma equação diferencial, para dar exemplos de informações qualitativas interessantes. Caso haja um ciclo limite, "é claro que o ponto móvel do qual nós falávamos acima não poderá jamais ultrapassá-lo e que ele permanecerá sempre no interior do ciclo, ou sempre no exterior" (POINCARÉ, 1921, p.xxv). Isto porque os ciclos limites são soluções da equação diferencial dos quais as outras soluções se aproximam assintoticamente sem interceptá-lo, o que contradiria o fato de que duas soluções não podem se cruzar. Temos um exemplo de uma das inovações do estudo qualitativo proposto por Poincaré: para um estudo qualitativo global das soluções, não é necessário estudá-las em *todo* o domínio, mas pode ser satisfatório descrever estas soluções em sub-conjuntos que nos informem sobre o comportamento assintótico das soluções.

Dissemos que Poincaré inova ao não mais considerar uma solução individualmente, mas o conjunto de soluções. Na verdade, podemos estudar apenas um sub-conjunto do conjunto de soluções em regiões significativas do domínio e, se desprezamos os estados transitórios do sistema, a descrição dos conjuntos para onde tendem as trajetórias fornece um quadro qualitativo do comportamento das soluções. Veremos ainda neste capítulo como evoluíram, em um primeiro momento, para casos mais gerais, as definições destes conjuntos, que descrevem o comportamento assintótico do conjunto de soluções.

3.3 Entre um problema e sua solução, entre o local e o global

Não obstante adiarmos a exposição do pensamento de Albert Lautman até a conclusão desta primeira parte, gostaríamos de mencionar brevemente um enunciado deste filósofo sobre os métodos qualitativos de Poincaré:

"A interpretação geométrica da teoria das equações diferenciais põe então bem em evidência duas realidades absolutamente distintas, há o campo de direções e os acidentes topológicos que podem sobrevir, como por exemplo a existência no plano de pontos singulares aos quais não é associada nenhuma direção, e há as curvas integrais com a forma que elas tomam na vizinhança das singularidades do campo de direções"(LAUTMAN, 1977, p.274).

Há duas realidades— o campo de vetores e as suas soluções— e a definição do campo de vetores inclui o domínio onde ele é definido. O enunciado acima quer dizer então que a existência e a repartição das singularidades são noções associadas à realidade do campo de vetores que define uma equação diferencial, enquanto o aspecto das trajetórias é relativo à realidade da solução desta equação.

Introduzimos uma diferença entre as realidades do problema e de sua solução. Obviamente estes dois âmbitos estão intimamente relacionados, mas o que está se dizendo aqui é que a relação entre o número de singularidades de cada tipo é um *dado* do problema e, para compreender o inusitado deste resultado, devemos lembrar que a natureza de uma singularidade é determinada pelo modo como se comportam as soluções que passam por sua vizinhança— se algumas soluções tendem assintoticamente para a singularidade e outras se afastam, temos um colo; se as soluções espiralam para a singularidade, temos um foco, e assim por diante. Mas dizer que as duas realidades estão profundamente intrincadas, não nos impede de afirmar que elas constituem realidades matemáticas distintas[12].

Quando estudamos as equações de primeira ordem e primeiro grau, onde as soluções são projetadas em uma esfera, os vetores do campo determinam as direções tangentes das curvas, que são soluções da equação diferencial. No caso da equação geral de primeira ordem, o problema é mapeado sobre uma superfície no espaço. Vimos, no capítulo anterior, que a natureza de cada singularidade depende dos autovalores da parte linear do campo e, certas condições satisfeitas, isto nos dá a forma das soluções na vizinhança destas singularidades, a menos de uma mudança de coordenadas conveniente. Dissemos, na primeira seção, que a relação entre o número de singularidades de cada tipo não depende da especificidade de um certo campo de vetores, mas da superfície onde ele será definido. Isto é, antes de conhecermos a natureza de cada singularidade, ou os números exatos de singularidades de cada tipo, sabemos

[12]No quinto capítulo ficará mais claro porque podemos falar de uma *realidade* propriamente matemática.

como estes números estão ligados por uma propriedade topológica da superfície onde o campo será definido. É a topologia da superfície que determina o que Poincaré chamou de *distribuição das singularidades* do campo.

A determinação da distribuição dos pontos singulares por invariante topológico da superfície é algo surpreendente, e traz à tona o modo como se enredam a definição do campo de vetores e o modo como se comportam as soluções da equação diferencial que ele vem definir. Dissemos que este resultado é importante na passagem da descrição local ao desenho global das soluções, e procuraremos exemplificar em seguida como isto é feito.

A classificação global de Poincaré para a equação de primeira ordem e primeiro grau só nos fornece uma integração qualitativa da equação se podemos conhecer a distribuição dos ciclos limites. Poincaré propõe, então, para conhecer tal distribuição, subdividir o domínio a partir dos ciclos, o que, como sabemos, demanda a demonstração de que os ciclos limites são em número finito. Ele começa por demonstrar que no interior e no exterior de um ciclo limite qualquer há sempre, ao menos, um foco ou um nó. É justamente em resultados de existência deste tipo que a distribuição de singularidades é empregada, e Poincaré traçará, então, um ciclo algébrico passando por todos os nós e todos os focos, que deverá cortar todos os ciclos limites e irá deduzir daí que deve existir um número finito de ciclos limites.

Na análise de seus trabalhos científicos feita por ele mesmo, Poincaré afirma que "é o estudo dos pontos singulares das equações de primeira ordem que nos fez conhecer as principais propriedades das curvas definidas por estas equações"(POINCARÉ, 1921, p.xxix). Isto porque as singularidades não são pontos quaisquer, mas acidentes do campo de vetores. Lautman dizia, por volta dos anos trinta, que as singularidades possuem, "nas teorias modernas", um papel cada vez mais dominador e excepcional. Sabemos qual é este papel na teoria das funções de variável complexa, às quais Lautman se refere, mas no caso real, esta participação não é tão forte. No entanto, para o caso bidimensional, como mencionado por Poincaré, podemos obter resultados globais a partir do estudo das singularidades como o teorema de classificação. Mas este teorema nos informa sobre os aspectos possíveis do conjunto de soluções. As formas específicas que ele adquire dependem da distribuição dos ciclos limites que, como vimos, é determinada pelo modo como as singularidades se distribuem pelo domínio que, por sua vez, vai depender da topologia da superfície onde o campo é definido.

Afirmamos que a definição do campo de vetores e o conjunto de suas soluções são seres matemáticos distintos. As singularidades são, ao mesmo tempo, acidentes desta definição do campo e soluções especiais da equação que permitem o estudo das soluções que estão em suas vizinhanças. Estes pontos excepcionais possuem, portanto, um papel de ligação entre as duas realidades matemáticas que mencionamos: a realidade do problema e a realidade de sua solução. O conhecimento do modo como estas singularidades se distribuem permite a passagem do estudo local à descrição global das soluções. Mas a distribuição das singularidades depende da superfície onde o campo de vetores está definido, que participa da posição do problema e portanto da realidade do problema. Não só a natureza local das soluções, mas pistas sobre o modo de passar da solução local à solução global estão dados, quando definimos o campo de vetores sobre uma superfície, o que faz parte da colocação do problema. Tudo isto para dizer que as condições dadas na proposição de um problema já trazem os elementos necessários à procura de sua solução, o que mostra que a solução está incluída no problema e não é apenas um desdobramento encontrado posteriormente, quando da *resolução* deste problema.

Se separamos as realidades matemáticas, não foi de forma alguma com o intuito de mostrar a independência ou autonomia de cada uma delas, mas, ao contrário, para fazer aparecer com mais força a relação íntima que estes níveis de realidade mantêm entre si. Nossa motivação é sobretudo afirmar que a posição de um problema traz em si as condições de possibilidade de sua solução, constituindo o elemento genético que procuramos. Voltaremos a falar da noção de problema como gênese das verdades matemáticas e do engajamento destas verdades, cujos modos de determinação são a única coisa que podemos pretender investigar.

3.4 O estudo do toro

Passamos a um outro problema analisado no artigo de Poincaré. A relação entre o número de singularidades de cada tipo é determinada pelo *genus* da superfície. Uma conseqüência deste resultado é que uma superfície de *genus* um é a única sobre a qual podemos definir um campo de vetores sem singularidades. É o caso de um toro, situação particular cuja análise finaliza a terceira parte do artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*".

Em primeiro lugar, as equações diferenciais são escritas na forma:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} = \Omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} = \Phi.$$

Começa-se novamente por repartir o toro por ciclos e os ciclos paralelos e meridianos exercerão um papel especial, visto que serão os referenciais dos sistemas de coordenadas em relação aos quais descreveremos as soluções. Vimos como Poincaré utilizou, no estudo global, o que ele chamou *teoria dos conseqüentes*, que será mais uma vez aplicada aqui para obtermos as interseções sucessivas de uma solução com um ciclo paralelo que não é solução da equação.

Um exemplo especial tratado por Poincaré é o caso em que $\Omega = a$ e $\Phi = b$, onde a e b são constantes positivas. Se a razão $\frac{a}{b}$ é comensurável, todas as trajetórias são fechadas e temos um quadro completo das soluções. No entanto, se esta razão é incomensurável, o comportamento das trajetórias terá propriedades bem interessantes, algumas delas descritas por Poincaré.

Tomando o meridiano $\phi = 0$ e $M(0)$ um ponto sobre este meridiano onde "o ponto móvel se encontra na origem dos tempos"(POINCARÉ, 1885a, p.142), tomaremos, quando o tempo cresce, o conseqüente $M(1)$ de $M(0)$ sobre o meridiano, e assim sucessivamente, os conseqüentes e antecedentes destes pontos formando uma seqüência:

$$M(-i), ..., M(-1), M(0), M(1), ..., M(i)$$

.

Poincaré mostra, então, que um ponto é levado no seu conseqüente por uma função contínua, que é uma transformação do círculo nele mesmo, e prossegue afirmando que os pontos M formam um conjunto de pontos "que chamarei P, segundo a notação adotada por M. Cantor"[13]. O conjunto P' é o conjunto derivado[14] de P, quer dizer, o conjunto de pontos na vizinhança dos quais existe uma infinidade de pontos que pertencem a P.

Deseja-se saber então como os pontos M podem se distribuir sobre o meridiano, o que nos informará sobre o comportamento das trajetórias da equação. Dois casos são possíveis: o conjunto de pontos comuns aos conjuntos P e a P' é vazio ou é igual ao próprio P. Isto é, uma propriedade do conjunto P é que, se ele tem um ponto em comum com seu derivado P', então todos os pontos de P estarão no conjunto derivado. Se estes conjuntos não têm nenhum ponto em comum, o ponto móvel que começa seu movimento em $M(0)$ não retornará jamais à vizinhança de seu ponto de partida, a menos que a trajetória seja fechada[15]. No outro caso, se o ponto inicial pertence a P', o ponto móvel retornará uma infinidade de vezes à vizinhança de seu ponto de partida e este é o caso que passaremos a tratar.

Poincaré irá então caracterizar o que ele denomina "a ordem circular dos pontos de P". Ele demonstra que existe um limite μ da razão entre o número de conseqüentes do ponto inicial quando efetuamos um certo número de revoluções em torno do meridiano e este número de revoluções. O número μ não depende da escolha do ponto inicial.

Poincaré observa que "a ordem circular dos pontos $M(i)$" só depende do número μ. Mas este número é o mesmo das quantidades $\mu i - E(\mu i)$, onde $E(x)$ é o maior inteiro contido em x e i é o índice em $M(i)$. Ele observa que os pontos onde o ponto móvel vem encontrar sucessivamente o círculo meridiano, "gozam de uma propriedade aritmética inesperada"(POINCARÉ, 1921, p.xxvii).

Estudar tal "ordem circular" é equivalente à análise de uma aplicação do círculo nele mesmo[16]. O número μ pode ser considerado como uma rotação média da aplicação.

Encontrar um ponto periódico da aplicação do círculo é equivalente a um ciclo da aplicação original sobre o toro. Poincaré, neste estudo, deseja excluir os casos em que

[13]Poincaré cita, por exemplo, (CANTOR, 1879), (CANTOR, 1880), (CANTOR, 1882), (CANTOR, 1883a). Este autor publicou, entre 1874 e 1883, uma série de artigos, além destes, relacionados ao mesmo tema.

[14]Cantor denominou este conjunto P' de "primeiro sistema derivado de P".

[15]Veremos, na segunda parte, que esta informação é importante para o problema da estabilidade.

[16]Os métodos de Poincaré evoluíram para o que conhecemos hoje como *teoria dos difeomorfismos do círculo*.

há um ciclo limite, uma vez que, de acordo com a sua definição de estabilidade (que veremos no sétimo capítulo), a presença de um ciclo limite nos permite concluir pela instabilidade.

O matemático francês mostra então que a aplicação do círculo possui um ponto periódico se e somente se o número μ é "comensurável"[17]. No entanto, motivado pela questão da estabilidade, ele se interessa pelo caso em que μ é "incomensurável".

Se este número é "incomensurável", Poincaré propõe uma análise que, mesmo não chegando a uma conclusão, abre vários caminhos às pesquisas futuras. Neste caso, ele conclui, a partir da propriedade aritmética de μ, que entre dois pontos de P há sempre pontos de P'. Poincaré mostra, em seguida, que o conjunto P' é igual ao seu "conjunto derivado", constituindo "um desses conjuntos que M.Cantor chama perfeitos"(POINCARÉ, 1885a, p.150)[18]. Se todos os pontos da circunferência do meridiano pertencem a P', isto será igualmente verdadeiro, seja qual for a trajetória a partir da qual formamos os conjuntos P e P'. A conclusão, neste caso, é que não poderemos traçar sobre o toro nenhuma região, por menor que seja, que todas as todas as trajetórias não venham atravessar infinitas vezes. Considerando a transformação como uma aplicação da circunferência nela mesma, Poincaré mostra que esta transformação é uma rotação caracterizada por μ, que Birkhoff denominará *coeficiente de rotação.*

Mas este resultado supôs que a interseção entre P e P' é igual a P para todas as trajetórias[19]. Assumindo esta hipótese, Poincaré demonstrou que a aplicação é equivalente a uma rotação. Mas como garantir esta hipótese?

Pode acontecer que isto seja verdadeiro para algumas trajetórias, enquanto para outras esta interseção seja vazia. Usando a nomenclatura atual, introduzida por Cantor, no primeiro caso o conjunto P é um conjunto perfeito *denso em toda parte* do círculo. Isto quer dizer que em todo intervalo do círculo, tão pequeno quanto se queira, podemos encontrar pontos de P.

Mas Poincaré reparou que podem existir conjuntos perfeitos que não são densos em nenhuma parte. Segundo Hadamard, Poincaré foi o primeiro a perceber esta possibilidade, que só foi explicitada por Cantor, em outro contexto, pouco tempo

[17]Dizemos, em linguagem moderna, que $\mu \in \frac{2\pi\mathbf{Q}}{2\pi\mathbf{Z}}$ ou que $\frac{\mu}{2\pi}$ é racional módulo 1.

[18]Um conjunto é dito "perfeito" justamente quando é igual ao seu derivado.

[19]Isto é, que todo ponto da circunferência é tomado na vizinhança de todo outro ponto por iterações sucessivas.

mais tarde. Na verdade isto é equivalente à possibilidade de P ser um conjunto perfeito descontínuo, do qual Cantor deu um exemplo que se tornou clássico e ficou conhecido como *conjunto de Cantor*.

Poincaré percebe que seria necessário demonstrar a impossibilidade da existência de um conjunto assim, para finalizar seu estudo mas só consegue analisar casos particulares. Na verdade, Poincaré acreditava que, se o número μ é incomensurável, seria possível encontrar uma aplicação que não era equivalente a uma rotação, uma vez que esta transformação deixaria invariante um conjunto de Cantor.

Este problema só será resolvido por Denjoy (DENJOY, 1932). Este mostra que existem difeomorfismos C^1 do círculo com esta propriedade. No entanto, para classe de diferenciabilidade maior ou igual a dois, Denjoy mostra que qualquer aplicação é conjugada, por um homeomorfismo, a uma rotação. Salientamos a profundidade deste resultado, que afirma ser o comportamento da aplicação determinado apenas pelo grau de regularidade da função que a define[20].

Voltando a Poincaré, ele concluirá o capítulo com duas perguntas extremamente atuais que apontam para as pesquisas que iriam dar continuidade ao seu trabalho:

(i) Como varia o número característico μ quando variamos os coeficientes das equações diferenciais? Poderíamos ter, para alguns valores destes coeficientes, um ciclo limite. E se para outros valores dos coeficientes μ é incomensurável (ou comensurável sem que haja ciclo limite) e se variamos os coeficientes de modo contínuo passando pelos valores que dão um ciclo limite, o número μ apresentará para estes valores um máximo ou um mínimo. "Está aí certamente o ponto de partida de uma série de estudos que serão, sem dúvida, fecundos, e que eu creio dever sinalizar aos trabalhadores" (POINCARÉ, 1885a, p.156).

Poincaré tinha razão. Nos referimos ao estudo de *bifurcações* que são definidas como os pontos do conjunto de parâmetros onde o aspecto das trajetórias muda sensivelmente. Este procedimento se encontra em diferentes teorias e mencionaremos brevemente, mais adiante, como ela é incorporada à teoria dos sistemas dinâmicos e constitui exatamente uma das novidades desta nova abordagem.

[20] O modo como isto se dá ficará ainda mais claro com os teoremas demonstrados por Michel Herman.

Citamos a segunda questão de Poincaré, que deixaremos para comentar quando falarmos do problema da estabilidade:

(i) Como problemas análogos a este são intimamente ligados com a questão sobre a convergência das séries trigonométricas, particularmente daquelas empregadas na mecânica celeste?

Ainda sobre as ferramentas introduzidas por Poincaré no estudo da "ordem circular" das interseções de uma trajetória com um dado meridiano, gostaríamos de dizer que as ferramentas que se inspiraram da obra de Cantor foram desenvolvidas por este último em um contexto distinto. Cantor, quando estudante em Berlim, teve aulas com Weierstrass, cuja teoria dos irracionais é conseqüência das pesquisas dos princípios da aritmética importantes em seu estudo das funções analíticas. Dentre estas pesquisas, dado um conjunto de infinitos pontos no plano complexo, devia-se provar que existe um ponto tal que, em toda vizinhança que podemos tomar deste ponto, há um outro ponto. Weierstrass havia demonstrado este teorema e os conjuntos citados por Poincaré e criados por Cantor podem servir a uma outra demonstração do mesmo resultado. Queremos mostrar, com este comentário, que é absolutamente inovadora a utilização que Poincaré faz destes conjuntos no estudo qualitativo, de caráter geométrico, das trajetórias definidas por uma equação diferencial sobre o toro. O que tem como conseqüência a criação de métodos que vieram a ser empregados freqüentemente na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, como a conhecemos hoje.

Na via iniciada por Poincaré, os primeiros a empregarem tais métodos foram Hadamard e Birkhoff. Veremos, na seção seguinte, como as ferramentas criadas por Poincaré foram utilizadas por estes autores para definir certos objetos úteis para o estudo de outros sistemas, que não são uma continuação direta do estudo do toro. Em um de seus primeiros artigos, que tem influência direta de Poincaré e do qual falaremos na seção seguinte, Birkhoff trabalha sobre as transformações da circunferência nela mesma, mostrando que existe uma transformação contínua, análoga a uma rotação de um ângulo incomensurável com 2π, que leva um conjunto que "não é denso em nenhuma parte" nele mesmo. Este resultado é importante para a construção de um exemplo de sistema dinâmico com uma propriedade de descontinuidade, da qual voltaremos a falar.

Vimos que a análise da dinâmica sobre o toro leva à definição de uma transformação da circunferência nela mesma que impulsionou trabalhos posteriores especificamente sobre este tipo de transformação. Até hoje, esta é uma linha de pesquisa dentro da teoria dos sistemas dinâmicos que, inspirando-se dos trabalhos de seus predecessores, foi iniciada por Denjoy, no trabalho que citamos, com quem o estudo da "ordem circular", da qual falava Poincaré, ganha um novo impulso[21].

3.5 Comportamento assintótico

Dissemos que uma das inovações do ponto de vista qualitativo de Poincaré é olhar um sub-conjunto do conjunto de soluções que nos informe sobre propriedades significativas da solução. Mostramos, no caso bidimensional, como os ciclos limites são importantes para este fim, justamente por permitirem a descrição das trajetórias que estão em suas vizinhanças.

Comentaremos brevemente como evoluíram, em um primeiro momento, as definições matemáticas dos conjuntos que representam o comportamento assintótico das soluções. Citaremos, com este fim, alguns trabalhos que foram diretamente influenciados pelo novo ponto de vista de Poincaré, expresso no artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*". Como este escrito levanta um grande número de problemas, com evoluções próprias e independentes, optamos por não listar os seguidores de Poincaré de uma só vez, mas analisar os desdobramentos de cada problema apresentado. Este procedimento convém ao tipo de história da matemática que pretendemos fazer, visto que não temos por fim uma história geral das idéias, mas uma história dos problemas onde tais idéias aparecem.

Mencionaremos então, em primeiro lugar, dois artigos de Hadamard publicados respectivamente em 1896 e 1898 (HADAMARD, 1897) e (HADAMARD, 1898). O problema de Hadamard é estudar a dinâmica obtida quando interpretamos as linhas geodésicas de uma superfície como trajetórias de um ponto se movendo sobre esta mesma superfície. No primeiro artigo, ele começa por observar que, se temos uma

[21]Se empregarmos a linguagem do capítulo anterior, este problema é também o de encontrar um teorema de conjugação no grupo dos homeomorfismos C^∞ do círculo nele mesmo que preservam orientação, onde o grupo das rotações é um subgrupo maximal comutativo, com o mesmo papel do subgrupo de Cartan.

superfície de revolução, esta trajetória permanece em geral entre duas paralelas dessa superfície.

Um ponto móvel, percorrendo certa curva em um sentido determinado, passa de uma a outra destas duas paralelas e o plano meridiano, que o contém, gira em torno do eixo de revolução de um certo ângulo constante. Ele irá estudar, então, citando os resultados de Poincaré que analisamos na seção anterior, o caso em que este ângulo é incomensurável com π. Neste caso, a geodésica passa tão perto quanto se queira de qualquer ponto situado no pedaço da superfície entre as duas paralelas.

Hadamard define então o "domínio" ("*domaine*") de uma linha geodésica (ou de uma trajetória em dinâmica) do modo que se segue:

"Se traçássemos a curva em preto, continuando-a indefinidamente, escureceríamos todo o pedaço em questão, e isto quão pequena seja a espessura do traço. Poderemos dizer que nossa geodésica *preenche* este pedaço ou que este pedaço constitui seu *domínio*"(HADAMARD, 1897, Parágrafo 43)(Grifo do autor).

Em seguida, ele generaliza a definição de domínio de uma trajetória, que ele denomina *domínio próprio*, dizendo que este se constitui de um conjunto de pontos tal que a trajetória passa infinitamente perto de cada um deles para valores infinitamente grandes do tempo. Se tomamos o domínio próprio de uma trajetória conjuntamente aos domínios próprios das trajetórias infinitamente vizinhas, temos o *domínio estendido* desta trajetória. Hadamard observa, então, que o domínio estendido não é sempre igual ao domínio próprio a partir do exemplo obtido quando temos geodésicas que não são todas fechadas sobre uma superfície de revolução. Neste caso, o domínio próprio de uma linha fechada é ela mesma enquanto seu domínio estendido compreende todo o pedaço de superfície entre as duas paralelas. Mas ele termina o artigo com a pergunta: "Haveria lugar, contudo, de pesquisar se, as trajetórias para as quais esta coincidência não tem lugar, não são excepcionais".

Se inspirando nestes trabalhos de Poincaré, Birkhoff irá propor definições de conjuntos que descrevem o comportamento assintótico em diversos níveis, delineando, nesta teoria, as formas de seu aspecto atual. No artigo "*Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques*", Birkhoff define os *pontos-limites omega* e *alpha*[22], inspirando-se na definição de *domínio* proposta por Hadamard. Ele irá definir, ainda, um conjunto *minimal* e um movimento *recorrente*.

"Todos os pontos dos quais os pontos da curva representativa de um movimento se aproximam indefinidamente para $\lim t = +\infty$ (ou $\lim t = -\infty$) serão chamados *pontos-limites omega* (ou *alpha*) do movimento; eles formam, obviamente, um conjunto fechado. Os pontos da própria curva não estão necessariamente em uma ou outra das classes de pontos-limites.

Em um artigo importante, M.Hadamard chamou o conjunto de pontos-limites de *domínio* do movimento"(BIRKHOFF, 1912, p.308).

Birkhoff estuda um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem definidas por funções reais analíticas. Ele mostra então, usando ainda o mesmo artigo de Hadamard, que todo movimento possui um conjunto fechado de movimentos limites e que o conjunto de movimentos limites *alpha* e *omega* de todo movimento é um sub-conjunto do conjunto de movimentos limites. Ele diz, então, que todo conjunto fechado de movimentos que é conjunto de movimentos limites alpha e omega de todos os seus movimentos, é um conjunto *minimal*. Todo movimento deste conjunto será dito *recorrente*.

O matemático americano afirma que uma condição necessária e suficiente para que um movimento seja recorrente é que "para todo número positivo ϵ, tão pequeno quanto se queira, existe um intervalo de tempo T, suficientemente grande para que o arco da curva representativa (do movimento), correspondendo a todo intervalo igual a T, tenha pontos distantes de menos de ϵ de qualquer ponto da curva inteira"(BIRKHOFF, 1912).

A recorrência de um movimento é uma propriedade próxima do fato de ele ser periódico. Quer dizer que, começando um movimento em uma certa condição inicial, o sistema não retornará exatamente ao mesmo estado, mas retornará a uma vizinhança deste estado. Partindo dos trabalhos citados de Poincaré e Hadamard, ele afirmará, então, que se descartamos a hipótese de que as funções que definem o sistema dinâmico são analíticas, existem movimentos recorrentes descontínuos para uma situação tridimensional, e este é o exemplo que citamos na seção anterior com o

[22]Chamados hoje respectivamente conjuntos $\omega - limite$ e $\alpha - limite$.

qual Birkhoff finaliza o artigo em questão.

Em trabalhos posteriores, Birkhoff, em particular em um artigo publicado em 1926 (BIRKHOFF, 1926) e em seu livro *Dynamical Systems* (BIRKHOFF, 1927a), propõe a definição de outros conjuntos que contêm informações sobre o comportamento assintótico do sistema e descrevem este comportamento em níveis distintos, para casos mais gerais. Temos, por exemplo, a definição dos conjuntos "não-errantes" ("*non-wandering*"). Um ponto P_0, no domínio de definição de um sistema dinâmico, é dito *errante* se existe uma vizinhança de P_0 que, uma vez movida pela dinâmica, jamais voltará a interceptar sua posição anteriormente ocupada. O conjunto dos pontos que não têm esta propriedade é dito *não-errante*. Vemos que esta definição traduz um tipo de recorrência mais branda do que aquela proposta pela noção de recorrência onde um ponto deve retornar à vizinhança de seu estado inicial.

Se os movimentos de um sistema se dão em uma região finita do domínio, Birkhoff afirma que um sistema dinâmico qualquer deve possuir certos "movimentos centrais" que possuem certas propriedades de recorrência e para os quais todos os outros movimentos tendem. Os pontos de equilíbrio e os ciclos limites de Poincaré são tipos particulares de movimentos centrais, no caso bidimensional. Este "movimentos centrais" não são os "movimentos recorrentes" como ele havia definido, mas o fato de eles possuírem um tipo de recorrência levará Birkhoff a afirmar que: "o estudo de sistemas não recorrentes leva inevitavelmente ao dos sistemas recorrentes"(BIRKHOFF, 1935, p.310).

Estes movimentos centrais são definidos como o limite de uma seqüência de conjuntos não-errantes. Seja M_1 o conjunto dos pontos não-errantes de uma certa variedade M de estados do movimento. Mostra-se que podemos formar um conjunto M_2 de pontos não-errantes de M_1 e assim por diante. Birkhoff mostra que este processo termina em algum M_r, que é o conjunto de movimentos centrais. Ele acrescenta que um dos problemas principais dos sistemas dinâmicos é a determinação de seus movimentos centrais.

As chamadas "equações da dinâmica", que correspondem a um caso conservativo, constituem um caso especial, em que todos os movimentos são centrais. Não nos alongaremos sobre este assunto, que está relacionado à estabilidade do Sistema Solar, de que falaremos na segunda parte.

Se consideramos os sistemas dissipativos, podemos ir um pouco mais longe. Estes sistemas são caracterizados por uma perda de energia e sua descrição qualitativa escolhe desprezar os estados transitórios do sistema. Neste caso, nos conjuntos não errantes, há conjuntos chamados *atratores*, que contêm todas as informações qualitativas importantes sobre o estado final do sistema. Um atrator A é um conjunto invariante pela dinâmica, definido pela interseção de todos os conjuntos que obtemos realizando movimentos por todos os pontos de uma vizinhança de A.

Terminamos por observar que na verdade todas as definições propostas aqui servem, ou foram introduzidas, para sistemas dinâmicos definidos por iterações sucessivas de transformações que já anunciamos, mas só iremos definir no próximo capítulo.

Capítulo 4

Seções de Poincaré e variedades invariantes

"Vimos, acima, que é o estudo dos pontos singulares das equações de primeira ordem que nos fez conhecer as principais propriedades das curvas definidas por estas equações; ao contrário, a teoria dos pontos singulares das equações de segunda ordem não bastaria para nos fazer penetrar tão profundamente no conhecimento das curvas C. É preciso introduzir, ademais, uma noção nova que tenha, em uma certa medida, o mesmo papel dos pontos singulares".

Esta frase está contida na análise posterior que Poincaré faz de seus próprios trabalhos científicos (POINCARÉ, 1921, p.29) e segue a descrição do seu estudo do caso bidimensional. Para as equações de ordem superior, as quais corresponde um estudo em dimensão maior, mencionamos que a análise local se faz do mesmo modo que no caso bidimensional. No entanto, a passagem do estudo local ao estudo global traz novos problemas. Um primeiro problema é a generalização do resultado sobre a distribuição das singularidades. Poincaré ensaia uma generalização para as equações de segunda ordem (Capítulo XVIII), baseada em um teorema de Kronecker (KRONECKER, 1869), mas esta não consegue abarcar todas as possibilidades[1]. Com a condição, assumida por Poincaré, de que as funções que definem a equação diferencial são polinomiais, ele determina os casos em que podemos garantir a existência de, ao menos, uma singularidade[2]. Para isto, Poincaré deve estudar um campo vetorial

[1]Este mesmo teorema é usado na demonstração de soluções particulares do problema dos três corpos (POINCARÉ, 1883).

[2]Sabemos hoje, devido a um resultado de Hopf, que a condição para que tenhamos um campo de vetores sem singularidade sobre uma variedade compacta é que esta variedade tenha característica de Euler nula.

em três dimensões, aplicado sobre uma superfície sem contato (que generaliza os arcos sem contato usados em duas dimensões). Mas este resultado pode ser generalizado para dimensão n pelo estudo de "multiplicidades" ("*Mannigfaltigkeit*") sem contato de dimensão $n-1$, as quais podem ser caracterizadas pelas suas ordens de conexão, "tal como elas são definidas por Riemann e Brioschi". Podemos compreender melhor o modo como Poincaré finaliza a análise de seus trabalhos sobre a análise qualitativa:

"Para ir mais longe, era preciso criar um instrumento destinado a substituir o instrumento geométrico, que me fazia falta quando eu queria penetrar no espaço de mais de três dimensões. Esta é a principal razão que me levou a abordar o estudo da *Analysis situs*"(POINCARÉ, 1921, pp. xxx e xxxi).

Mas os limites do instrumento geométrico não constituem o único impedimento ao estudo em dimensões maiores. Já no caso tridimensional, acontece que o conhecimento da natureza local das trajetórias na vizinhança das singularidades e da distribuição destas singularidades não é suficiente para estabelecermos resultados globais, como a classificação das trajetórias e a distribuição dos ciclos limite, que tínhamos em duas dimensões. É preciso, como aparece na citação de Poincaré mencionada logo no início deste capítulo, introduzir um novo objeto que venha substituir as singularidades em dimensões superiores. Este papel será exercido pelas soluções periódicas. No livro *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ele enuncia, de modo ainda mais impactante, o papel das soluções periódicas:

"Aliás, o que torna estas soluções tão preciosas para nós, é que elas são, por assim dizer, a única brecha por onde podíamos tentar penetrar em um lugar considerado, até então, inabordável" (POINCARÉ, 1892-1899, parágrafo 36).

Vimos que, no caso bidimensional, o papel das soluções periódicas é fundamental para os resultados globais. Isto porque encontramos um modo de repartir o domínio por ciclos limites, os quais possuem a importante propriedade de nos fazer conhecer, ao mesmo tempo que eles, as soluções que lhes são vizinhas e tendem para eles assintoticamente. Mas lembremos que em duas dimensões sabíamos descrever completamente os aspectos possíveis das trajetórias. Em dimensões maiores, as soluções periódicas têm um papel distinto, permitindo uma descrição de caráter local.

Os qualificativos *local* e *global* podem possuir graus diferentes, dependendo do contexto onde se inserem. As soluções periódicas não serão locais da mesma forma que as singularidades o são, mesmo que Poincaré tenha dito que elas vêm substituir, em dimensões superiores, o papel exercido pelos pontos singulares em dimensão dois. Veremos que estas soluções nos fornecem informações sobre as soluções na sua vizinhança, permitindo-nos penetrar em um conhecimento das trajetórias que já possui um caráter global. Poincaré chega a enunciar, em um artigo sobre as soluções particulares do problema dos três corpos(POINCARÉ, 1883), que as soluções periódicas podem ser consideradas "órbitas intermediárias" para o estudo das soluções que lhes são vizinhas. Podemos concluir, mesmo que de modo ainda incipiente, que as soluções periódicas se situam *entre* um estudo local e um estudo global das soluções. Havíamos dito o mesmo do papel das singularidades em dimensão dois, mas já não poderíamos fazê-lo em dimensões superiores.

O ponto fundamental para compreendermos o papel das soluções periódicas é o método inventado por Poincaré no artigo, "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*", para dar um primeiro passo em direção a uma descrição global das trajetórias que são soluções de uma equação diferencial. Método este que dará origem a resultados inesperados e esclarecerá em que medida a analogia entre as singularidades e as soluções periódicas têm razão de ser. Trata-se do "método das seções", como ele o chamava, que ficou conhecido depois como "seções de Poincaré". Aliás, na primeira vez onde os métodos de seção aparecem, ele se baseia na demonstração de que as equações da mecânica celeste admitem certas integrais particulares, que podem ser vistas como trajetórias fechadas, referindo-se ao já mencionado artigo "*Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*"(POINCARÉ, 1883)[3]. Isto apenas para indicar que é razoável supor que existe uma trajetória fechada. Poincaré empregar, então, na análise da equação de segunda ordem, um sistema de coordenadas na vizinhança desta solução periódica.

Seja s o arco da trajetória fechada com origem em um ponto O. Traçamos então, pelo ponto O, um plano normal à trajetória fechada onde coloco um sistema de coordenadas. Este sistema convém à representação de um ponto vizinho à trajetória fechada que terá coordenadas (s, x, y) onde estas duas últimas são tomadas sobre o

[3]Note-se que a quarta parte de "*Sur les courbes...*" só foi publicada em 1886, portanto após a publicação do artigo sobre as soluções particulares do problema dos três corpos.

plano normal. Podemos dizer então que, se P_0 é um ponto do plano normal $s = 0$, vizinho de O, a trajetória que passa por P_0 irá cortar todos os planos normais quando s cresce até cortar novamente o plano em $s = 0$ em um certo ponto P_1[4].

Mostra-se, então, que a transformação que leva P_0 em P_1 é holomorfa, e é possível, portanto, empregar a mesma análise local dos capítulos anteriores na vizinhança do ponto O que, por estar sobre a solução periódica, é mantido inalterado por esta transformação.

O resultado desta análise é que a dinâmica dos pontos de interseção sobre o plano normal é análoga à dinâmica das trajetórias de um sistema bidimensional na vizinhança de um ponto singular[5]. Falando deste resultado, Poincaré emite uma observação que é fundamental para nós:

"É impossível não sermos surpreendidos pela analogia que apresenta a análise precedente com a teoria dos pontos singulares"[6].

Note-se que a transformação em questão é uma transformação discreta dos pontos sobre o plano normal e, se conhecemos a dinâmica desta transformação na vizinhança do ponto fixo, conheceremos também a dinâmica das trajetórias do sistema original na vizinhança da solução periódica. Isto dará origem à definição alternativa de um sistema dinâmico por iterações sucessivas de um difeomorfismo, como mencionamos no primeiro capítulo. Para compreendermos os desdobramentos desta invenção de Poincaré, necessitamos de alguns detalhes sobre o modo como se chega até a analogia citada.

Conhecendo uma certa solução, que é, no caso, uma solução periódica, e estudando a dinâmica da transformação de pontos sobre a seção, Poincaré demonstra que esta transformação é holomorfa e pode ser expandida em série na vizinhança do ponto fixo considerado. Tomando os termos de primeira ordem destas séries, eles possuem uma integral da forma:

[4] Lembremos que Poincaré assume a continuidade das soluções em relação às condições iniciais e a certos parâmetros.

[5] Exceto para o caso de um centro, que apresentará algumas dificuldades das quais falaremos na segunda parte.

[6] "*Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie que présente l'analyse qui précède avec la théorie des points singuliers*" (POINCARÉ, 1886a, p.204).

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t}\varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\varphi_2(t) \\ y = A_1 e^{\lambda_1 t}\psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\psi_2(t) \end{cases}$$

onde as funções são séries trigonométricas e os λ_i são constantes.

Os casos são analisados a partir dos valores de λ_1 e λ_2, como no caso local bidimensional. Mas se estes valores são reais positivos, um maior e outro menor que um, acontece algo interessante: Poincaré afirma que existem, sobre o plano normal, duas curvas K e K', tangentes respectivamente a Ox e Oy, que encontram a trajetória fechada na origem, dadas por funções holomorfas de uma mesma variável, tais que, se um ponto P_0 está sobre uma destas curvas, sua próxima interseção, P_1, também estará.

Em uma linguagem um pouco distinta daquela empregada por Poincaré, dizemos que estas curvas contêm os iterados de todos os seus pontos e são portanto invariantes pela transformação. Para demonstrar isto, escrevemos P_1 como função de P_0:

$$\begin{cases} x_1 = S_1 x_0 + \phi_1(x_0, y_0) \\ y_1 = S_2 y_0 + \phi_2(x_0, y_0) \end{cases}$$

onde ϕ_i são séries começando pelos termos de segundo grau. Notemos que isto nos dá uma transformação de pontos.

Poincaré substitui então a equação das curvas K e K' na transformação acima, obtendo uma equação funcional e encontrando as equações das curvas como séries convergentes. Os pontos que interceptam as curvas K e K' descrevem as trajetórias infinitamente vizinhas da trajetória fechada para $t = -\infty$ e $t = +\infty$ respectivamente. As trajetórias que não interceptam nem uma nem outra curva permanecem a uma distância finita da trajetória fechada e seus pontos de interseção possuem, em relação ao referencial do plano de seção, abscissas crescentes e ordenadas decrescentes ou vice-versa. Poincaré mostra exatamente que isto é válido, não somente para a aproximação linear, mas se também consideramos os termos de ordem superior da expansão em série.

Este tipo de resultado teve muitos desdobramentos até os dias de hoje, mas, em um primeiro momento, gostaríamos de citar os trabalhos de Hadamard, Lattès e Birkhoff, nesta ordem. O primeiro tem como objetivo fornecer novas demonstrações, quando não assumimos as hipóteses de analiticidade de Poincaré: "não somente estas provas nos permitem desprezar uma hipótese, a saber a da analiticidade; mas elas são sempre mais instrutivas, mostrando-nos (...) o comportamento e o mecanismo do fenômeno, que não são ressaltados quando usamos séries de potências. Além disso, a questão de saber se a analiticidade é implicada ou não na solução de um problema tem uma grande importância em si: ela penetra profundamente na natureza do problema"(HADAMARD, 1933).

Em um artigo de 1901 (HADAMARD, 1901), Hadamard tratará diretamente das transformações de pontos, demonstrando que o resultado de Poincaré é válido, se admitimos apenas certas condições de regularidade sobre a transformação (que pode não ser analítica). Uma outra novidade introduzida por Hadamard é a demonstração de que as curvas invariantes existem, mesmo se apenas um dos valores de λ_i é maior que o outro em valor absoluto[7]. Hadamard afirmará então que podemos tomar uma região sobre o plano de seção, em torno da origem, como o interior de uma circunferência, e, iterando-a sucessivamente pela transformação, veremos que esta região será contraída em uma direção e expandida na outra, até que a figura se degenere em uma reta que será uma curva invariante. As condições assumidas por Poincaré determinam um caso particular, onde existem apenas duas curvas invariantes.

Poderíamos pensar, como salienta Hadamard, que se os valores de λ_i são ambos menores que um em valor absoluto, não teríamos uma das direções invariantes. O que dissemos no parágrafo acima é que, nas condições dadas por Poincaré, temos exatamente duas curvas invariantes. Mas se assumimos por exemplo $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$ obtemos uma curva invariante pelo processo análogo ao de Poincaré, mas não sabemos se existe outra. Este será o assunto do artigo de Lattès, que será considerado mais adiante. Terminamos este parágrafo observando que, como não se admitia a analiticidade, o problema era difícil de ser resolvido, pois não se sabia quais as condições de regularidade que deveriam intervir.

O artigo de Samuel Lattès foi publicado em 1906 e chama-se "*Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*". Vemos, já pelo título, que a sua formulação do problema usa uma linguagem

[7]Note-se que as igualdades são excluídas, sem esquecer de que só falamos de valores reais.

nova, que está bem próxima daquela que usamos atualmente. O autor começa por inserir o problema em uma classe de problemas relacionados a equações funcionais[8]. As equações que definem uma curva, ou superfície invariante, são uma categoria particular destas equações. Empregando o termo *multiplicidade* para designar uma variedade, o autor observa:

"Sabemos que a procura de uma multiplicidade invariante por um grupo *contínuo* de transformações depende de equações diferenciais ou de equações a derivadas parciais. Mas se, no lugar de um grupo *contínuo*, considera-se uma transformação *isolada*, a procura de uma multiplicidade invariante por esta transformação depende de *equações funcionais*" (LATTÈS, 1906, p.2).

Temos assim uma formulação parecida com a atual, que nos permite enxergar a profundidade da associação entre a dinâmica determinada pelas soluções de uma equação diferencial e a transformação de pontos que é a ela associada. Lattès considera o problema em duas e três dimensões, mas enuncia o problema geral da investigação das variedades invariantes. Ele estuda os casos analítico e não analítico, a partir dos trabalhos de Poincaré e Hadamard, pela análise do que denomina "domínio de um ponto duplo". Ponto duplo é o ponto que é mantido fixo pela transformação de pontos e seu domínio é justamente o plano de seção.

Lattès não consegue concluir a análise para todas as possibilidades dos valores dos λ_i, mas mostra que estes valores são elementos essenciais do problema, não estando relacionados apenas à garantia do sucesso de um certo método, ou de um certo tipo de transformação[9]. Os resultados obtidos não diferem muito dos citados anteriormente, mas, enquanto Poincaré só definia as curvas invariantes para o caso em que $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$, estas curvas se mostram úteis para o estudo do aspecto local dos demais casos[10]. Também surpreendido pelos resultados encontrados, Lattès explica da seguinte maneira a razão da similitude entre a análise das vizinhanças de um ponto fixo da transformação e de um ponto singular de uma equação diferencial, que já havia impressionado Poincaré:

"Explico as razões desta ligação entre as duas teorias, mostrando que, no domínio

[8]Dos quais os de autoria de Picard aparecem com mais destaque.

[9]Lembramos mais uma vez que estes valores são considerados reais e diferentes de um, em valor absoluto

[10]Que Poincaré também havia descrito com sucesso, mas para situações menos gerais.

(vizinhança) de um ponto singular, a equação diferencial se apresenta como limite da equação funcional que define uma curva invariante pela transformação de pontos que admite o ponto singular por ponto duplo"(LATTÈS, 1906, p.5).

Hadamard salienta (HADAMARD, 1933) que a relação entre as duas teorias é a mesma relação que há entre o contínuo e o descontínuo. Estão à disposição vários ingredientes para que se possa considerar indistintamente um sistema dinâmico como o fluxo definido por uma equação diferencial ou como iterações sucessivas de uma transformação de pontos, que dizemos hoje ser um difeomorfismo. No entanto, esta identificação, que será um passo decisivo em direção ao aspecto atual da teoria dos sistemas dinâmicos, terá um impulso definitivo nos trabalhos de Birkhoff, dos quais citamos em primeiro lugar o artigo "*Surface transformations and their dynamical systems*" (BIRKHOFF, 1920b).

É neste trabalho, em particular, que Birkhoff define quando uma transformação é hiperbólica, noção que, conforme veremos, é de suma importância. Neste primeiro momento a definição se aplica ao caso de curvas invariantes ditas *formais*. Isto é, a partir de duas séries de potência formais f e g, tomamos as equações $u = f(t)$ e $v = g(t)$ que definem curvas formais no ponto $(0,0)$. Consideramos então uma transformação T aplicada a tais curvas e desejamos encontrar as curvas formais invariantes.

"Uma divisão fundamental de tipos de pontos invariantes será feita de acordo com o fato de existirem ou não curvas deste tipo dadas por séries reais (...) a transformação T será chamada *hiperbólica*, se existirem curvas reais formalmente invariantes, e *elíptica* no caso contrário"(BIRKHOFF, 1920b, p.26).

Os casos em que tais curvas existem são dados pelas raízes de uma equação associada à parte linear das séries que definem a transformação na vizinhança de um ponto mantido invariante, que chamamos hoje de autovalores da parte linear da transformação. Segundo a definição de Birkhoff, as curvas reais invariantes existem— e a transformação é hiperbólica— se as raízes forem disjuntas do círculo unitário.

O estudo das transformações de uma superfície é iniciado por Birkhoff em um artigo anterior, de 1917 (BIRKHOFF, 1917), onde são tratadas as equações do movimento com dois graus de liberdade que dependem de duas coordenadas de posição e duas de velocidade, estando portanto em um espaço de quatro dimensões que se reduz a uma superfície tridimensional, se consideramos a superfície que corresponde à energia constante. Uma *superfície de seção*, que generaliza o plano de seção de Poincaré, é definida como uma superfície analítica (ou analítica por partes) cuja fronteira é dada por um número finito de linhas de fluxo, cortada no mesmo sentido pelas linhas de fluxo e ao menos uma vez por todas as linhas de fluxo em um intervalo fixo de tempo[11](BIRKHOFF, 1917, p.269). Birkhoff ilustra a existência destas superfícies em exemplos distintos, de *genus* e número de fronteiras distintos, para indicar que "a superfície de seção é um fenômeno bastante geral".

A redução do problema de se descrever a dinâmica do fluxo definido por uma equação diferencial— em particular de uma equação de movimento bidimensional— a partir da dinâmica de uma transformação, será justificada mais explicitamente no artigo "*Surface Transformations and their Dynamical Applications*", publicado no *Acta Mathematica* a convite de Mittag-Leffler e Nörlund. Birkhoff irá considerar uma transformação analítica na vizinhança de um ponto mantido invariante que é, na maior parte dos casos, conservativa. Sem utilizar esta última hipótese, ele descreverá os casos em que um ponto irá se mover, por aplicações sucessivas da transformação, sobre uma hipérbole ou sobre duas retas paralelas (que podem ser consideradas uma elipse degenerada), inspirando a designação dos casos "hiperbólico" e "elíptico".

A definição explícita de um sistema dinâmico como iteração de uma transformação, nós encontramos pela primeira vez no livro "Dynamical Systems" publicado por Birkhoff em 1927 (BIRKHOFF, 1927a). Falando do método das transformações de Poincaré, o autor define um sistema dinâmico dizendo que a forma desta definição pode sofrer uma mudança impressionante ("*striking*") se aproximando do enunciado seguinte:

Suponhamos que possamos construir uma superfície analítica fechada S de $n-1$ dimensões "na variedade de estados do movimento" tal que todas as linhas de fluxo venham cortá-la ao menos uma vez após um intervalo de tempo dado. Podemos chamar esta superfície S "superfície de seção". Se seguimos um ponto P de S ao longo de uma linha de fluxo, ela interceptará S novamente em um ponto P_1 e nós temos definida uma transformação T, que é bijetiva, analítica e discreta, da superfície

[11]Para este tipo de problema estas superfícies de seção também já haviam sido consideradas por Poincaré.

nela mesma. Podemos associar assim o problema dinâmico à transformação discreta T da superfície nela mesma. "As propriedades dos movimentos são então espelhadas (*"mirrored"*) nas propriedades de T"(BIRKHOFF, 1927a, p.143).

Isto acontece sobretudo para as propriedades que interessam à análise qualitativa. Birkhoff diz então, claramente, que podemos definir um sistema dinâmico igualmente pelo fluxo determinado pelas soluções de uma equação diferencial, onde o tempo é considerado contínuo, ou pelas iterações sucessivas de uma transformação discreta definida sobre uma variedade. Esta transformação é chamada, por motivos óbvios, "transformação de Poincaré". Notemos no entanto que a superfície de seção, tal como definida por Birkhoff, não existe sempre, sobretudo quando aumentamos as dimensões do problema. Este fato não passou despercebido para Birkhoff, de modo algum, mas ele afirmará, assim mesmo, que a redução de um sistema dinâmico a uma transformação de pontos é, não apenas válida, mas fundamental do ponto de vista teórico[12].

Mesmo se existe alguma limitação à utilização dos métodos de seção, tal como foram introduzidos por Poincaré, ao considerarmos dimensões maiores, averiguar-se-á que é mantida a possibilidade de se estudar o comportamento das soluções através de uma transformação de pontos. O problema em dimensões superiores é que o papel atribuído às soluções periódicas não será mais o mesmo. Voltando ao tempo de Birkhoff, gostaríamos de mencionar, em particular, um extenso artigo que foi coroado pela Pontifícia Academia de Ciências: "*Nouvelles Recherches sur les Systèmes Dynamiques*"(BIRKHOFF, 1935). Neste trabalho, Birkhoff irá observar que a opinião de Poincaré sobre a importância das soluções periódicas parece válida apenas em dimensão três, acrescentando em seguida:

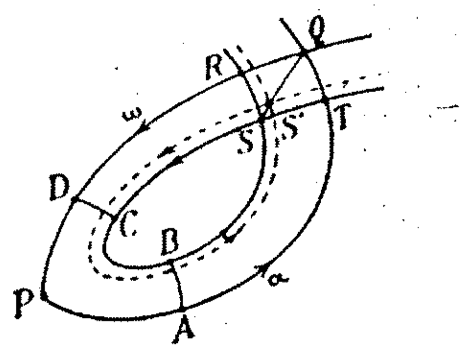
"Para criar uma teoria definitiva para $n > 3$ será necessário ou descobrir novas entidades analíticas das quais se possa servir, ou empregar entidades não-analíticas tais como as soluções recorrentes que eu introduzi"(BIRKHOFF, 1935, p.87).

Ainda neste artigo será levada adiante a análise do comportamento da vizinhança

[12] De fato, na teoria tal como a conhecemos atualmente, um sistema dinâmico é indistintamente tomado como um fluxo ou um difeomorfismo. Podemos inverter a idéia dos métodos de seção utilizando a *suspensão* de um difeomorfismo, que é um modo de associar um fluxo a um difeomorfismo. Definimos este último, em dimensão n, como uma transformação de Poincaré de um campo em dimensão $n+1$. As demonstrações não se traduzem imediatamente de um caso a outro, mas em geral isto não é difícil de ser feito.

de um ponto fixo, seja ele elíptico ou hiperbólico, quando a iteramos por uma transformação bidimensional. Iremos nos restringir à descrição do caso hiperbólico, onde esta análise é facilitada pela existência das curvas invariantes pela dinâmica. A transformação será decomposta em componentes que nos permitem analisar a dinâmica sobre cada uma destas curvas separadamente. Um importante passo é dado quando iteramos pela transformação as curvas invariantes, que haviam sido definidas localmente, e perguntamos o que ocorre.

Tomamos então a curva α que tem o ponto fixo, P, como α-limite, isto é, a curva cujos pontos "nascem" no ponto fixo; e a curva ω, que tem o ponto fixo como ω-limite, a curva cujos pontos "morrem" no ponto fixo. Birkhoff denomina "vizinhança estendida" de um ponto fixo P, a vizinhança dos dois ramos das variedades invariantes α e ω, que são adjacentes a P e se estendem até um ponto Q onde elas voltam a se encontrar[13]. A figura seguinte foi extraída deste artigo de Birkhoff:



O ponto Q é chamado um *ponto homoclínico*, pois corresponde a uma trajetória fechada que é dita *homoclínica* à trajetória fechada que deu origem ao ponto[14] P. O ponto Q também é chamado duplamente assintótico a P, uma vez que $\omega(Q) = \alpha(Q) = P$.

No artigo "*Sur les problèmes des trois corps et les équations de la dynamique*" (POINCARÉ, 1890) uma solução periódica instável e suas soluções assintóticas são

[13]Birkhoff observa que não é necessário admitirmos a existência de uma superfície de seção regular para obtermos esta vizinhança.

[14]Na verdade, Birkhoff já havia realizado a mesma análise para um ponto fixo elíptico, sem usar obviamente as curvas invariantes, concluindo também pela existência de um ponto homoclínico.

representadas por uma trajetória fechada com duas superfícies assintóticas. A vizinhança desta solução será estudada mais uma vez pelo método de seções, onde as superfícies assintóticas serão representadas por duas curvas. Poincaré irá perceber então que, se estendemos estas curvas, elas podem vir a se interceptar em um ponto e uma trajetória do sistema original, que passe por este ponto, pertencerá simultaneamente às duas superfícies assintóticas, devendo ser chamada *duplamente assintótica*.

Este assunto possui uma importância crucial no trabalho de Poincaré, mas, como se trata do problema da estabilidade, voltaremos a mencioná-lo com mais detalhes na segunda parte de nossa tese. Gostaríamos, contudo, de observar que este problema aparecerá novamente no terceiro volume de seu livro *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (POINCARÉ, 1892-1899, p.384), onde as soluções duplamente assintóticas serão rebatizadas como *soluções homoclínicas.*

Poincaré observa não somente que existe uma solução homoclínica em sua descrição do problema restrito dos três corpos, mas que podem existir infinitas soluções deste tipo sobre uma superfície assintótica qualquer. Ele observa então que:

"Não temos ainda o direito de dizer que as soluções duplamente assintóticas são *überalldicht*[15] sobre a superfície assintótica; mas isto parece provável"(POINCARÉ, 1892-1899, p.387).

Birkhoff irá se aprofundar posteriormente nas várias propriedades das interseções homoclínicas, percorrendo as vias abertas por Poincaré. Na vizinhança estendida de um ponto homoclínico[16], que Birkhoff analisa, pode existir uma riqueza imensa de comportamentos. Birkhoff demonstra, para o sistema tridimensional considerado, que em toda vizinhança de um solução homoclínica há uma infinidade de soluções periódicas. Esta conclusão indica um novo tipo de complexidade para o fenômeno das interseções homoclínicas, que irá revelar ainda outras estranhas possibilidades.

Poincaré estava absolutamente consciente da complexidade da dinâmica associada à presença de uma infinidade de soluções duplamente assintóticas, representadas sobre o plano de seção por infinitas interseções das curvas assintóticas, e a prova disso é a célebre descrição da figura que renuncia esboçar, a não ser pela imaginação:

[15]Densas.

[16]Cabe observar que só estamos considerando aqui o caso em que o ponto homoclínico é obtido por uma interseção transversal das curvas invariantes.

"Se procuramos representar a figura formada por estas duas curvas e suas interseções em número infinito, onde cada uma corresponde a uma solução duplamente assintótica, estas interseções formam uma espécie de treliça, de tecido, de rede de malhas infinitamente apertadas; cada uma das duas curvas não deve jamais recortar-se a si própria, mas dobrar-se sobre si de uma maneira muito complexa para vir a cortar uma infinidade de vezes todas as malhas da rede.

Ficaremos impressionados com a complexidade desta figura, que eu nem mesmo tento traçar"(POINCARÉ, 1892-1899, p.389).

4.1 "A seção de Poincaré é um gesto"

Mesmo que saibamos hoje ser a análise da vizinhança das soluções periódicas insuficiente para determinarmos o aspecto qualitativo global das soluções, foi com esta noção que se deu um primeiro passo em direção ao estudo global. As trajetórias fechadas são soluções especiais, porque encerram uma característica de invariância simples, dada pela periodicidade. Partindo de soluções periódicas, vimos reduzirem-se um ao outro um problema contínuo e um problema discreto, com a introdução de métodos de diferenças finitas no estudo de equações diferenciais de um modo absolutamente novo, em comparação ao que se fazia antes de Poincaré. Isto foi possível porque Poincaré teve a brilhante idéia de cortar transversalmente uma solução periódica e estudar o que se passava sobre o plano de corte.

Se a dinâmica definida pelo fluxo pode ser considerada como ação de um grupo contínuo sobre o espaço onde a equação diferencial está definida, o procedimento de Poincaré revela que esta dinâmica é determinada de modo equivalente pela ação de um grupo discreto sobre a superfície de seção. A transformação de pontos, que chamamos T, é uma transformação de Poincaré definida quando seguimos os pontos vizinhos ao ponto fixo e olhamos o seu primeiro retorno sobre a seção de Poincaré. Por isto, ela pode ser também denominada "transformação de primeiro retorno". Ao invés de analisarmos o comportamento das linhas de fluxo, estudaremos o comportamento dos pontos que obtemos iterando uma certa condição inicial x_0 por T. A propriedade de grupo é expressa por:

$T^m(T^n(x_0)) = T^{n+m}(x_0) = T^n(T^m(x_0))$.

Na verdade, a definição de um fluxo já partia da consideração de todos os estados ao mesmo tempo. O que fazemos aqui é interromper o conjunto de estados, em um certo momento, e definir a evolução do conjunto de estados pelo acontecido desde o início até este momento. Não dependemos necessariamente da seção de Poincaré para fazer este corte. Esta possibilidade está dada pela propriedade de grupo do fluxo que diz que, se aplicamos o fluxo durante um tempo t a um estado correspondente a um instante s, isto é equivalente a aplicar o fluxo durante um tempo $s + t$ e temos $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{s+t}(x_0)$.

Birkhoff já havia reparado que, em um espaço abstrato qualquer, não é difícil ver a relação íntima entre uma dinâmica com tempo contínuo e uma dinâmica com tempo discreto, se levarmos em consideração a "conexão entre uma imagem visual de tipo contínuo mudando de modo ordinário e a correspondente imagem de quadros em movimento de tipo discreto"(BIRKHOFF, 1941, p.1). Isto permite, então, a redução de um fluxo contínuo a uma transformação discreta, por uma "parada" no fluxo em um momento qualquer que podemos considerar como o instante um. Temos assim que:

$$T^n(x_0) = T(T^{n-1}(x_0)) = T(T(T^{n-2}(x_0))) = \dots$$

.

A dinâmica será determinada pelo conjunto de estados no instante em que definimos T, e isto é o que a formulação do problema como ação de um grupo discreto quer dizer. Lembrando que é possível reciprocamente mergulhar um fluxo discreto em um fluxo contínuo, finalizamos a associação entre uma dinâmica contínua e uma dinâmica discreta que possui uma dimensão a menos.

Uma conclusão deste tipo nos foi primeiramente revelada pelo traçado de uma seção de Poincaré, sobre a qual aparecem resultados surpreendentes, como a semelhança entre o aspecto da vizinhança de uma singularidade e da vizinhança de um ponto fixo sobre a seção. Isto porque podemos descrever as trajetórias, nas proximidades do ponto fixo, a partir da determinação de curvas sobre a seção, que são invariantes pela dinâmica. A continuidade em relação às condições iniciais, sobre a qual se baseou a grande novidade da abordagem de Poincaré, ou seja, a consideração simultânea de todas as soluções, vem mostrar toda a sua força ao descobrirmos curvas invariantes sobre o plano que secciona uma solução periódica: a solução periódica retorna sobre o mesmo ponto e há soluções vizinhas que retornam traçando as mesmas curvas sobre a seção.

Lattès e Birkhoff já haviam proposto explicações matemáticas para as constatações que haviam impressionado Poincaré. A semelhança entre os dois casos, hoje, já não nos inquieta, principalmente quando apresentada de um modo onde a justificativa precede a evidência de tais fatos. Nossa motivação ao privilegiar a ordem histórica é justamente a de fazer aparecer, em um momento de descoberta, a força de um certo resultado.

Dada esta motivação, não podemos nos contentar com nenhuma explicação matemática proposta após o fato desvelado. Gostaríamos de defender que os comportamentos que o método das seções de Poincaré vêm revelar, permitem-nos compreendê-lo como um *gesto*. Esta noção foi bastante explorada pelo matemático e filósofo Gilles Châtelet que soube, de modo absolutamente original, aproximar filosofia e matemática a partir do que a matemática *pensa* e não do que podemos pensar *sobre* ela. Dele tomamos de empréstimo as palavras que se seguem para justificar o papel que imprimimos às seções de Poincaré:

"O gesto possui uma exemplaridade historial: se podemos falar de *acumulação* do saber ao curso da sucessão das gerações, devemos falar de gestos *inaugurando* dinastias de problemas"(CHÂTELET, 1993, p.32).

Os problemas relacionados às variedades invariantes que se deixam traçar sobre as seções de Poincaré, fazem-nos perceber o grau de generalidade de uma decomposição, que parecia natural no problema plano. As propriedades profundas de invariância serão um primeiro passo em direção à descrição não local das trajetórias.

Pensemos a semelhança que se estabelece entre casos distintos, como o comportamento local das soluções de uma equação de primeira ordem, na vizinhança de suas singularidades, e o das interseções das soluções de uma equação de segunda ordem com um plano transversal a uma solução periódica. Podemos pensar que se trata de uma analogia natural, se olhamos o problema a partir das ferramentas que temos hoje à nossa disposição, e que subentendem operacionalmente a equivalência entre a definição de um sistema dinâmico como um fluxo definido por uma equação diferencial ou como iterações de um difeomorfismo. Mas se nos posicionamos sobre o instante mesmo em que traçamos um plano de seção, obtemos uma semelhança inesperada com a análise das singularidades, que tanto impressionou Poincaré.

O título desta seção é, na verdade, um abuso de linguagem, pois a seção de Poincaré, entendida como um objeto matemático, não é um gesto. Chamamos *gesto* o movimento de pensamento que ela vem expressar. Poderíamos dizer, mesmo que de modo um tanto impreciso, que na noção de *gesto*, tal como a enunciamos, está contida a idéia de *gestação* e, portanto, de *gênese*. Como se no movimento de pensamento que o gesto expressa já estivessem contidos os resultados e os desdobramentos que a efetivação do procedimento virá tornar objetivos. Não diremos tampouco que o gesto é subjetivo; não se trata do gesto de Poincaré, pois não podemos dizer que os desdobramentos do método que ele inventou sejam produção de seu espírito. Este é mais um indício de que a matemática trata de objetos e verdades que, por não serem sensíveis, não são menos reais.

Gilles Châtelet mostra, no primeiro capítulo da obra que citamos há pouco, como Cauchy se instala no plano complexo para contornar um pólo— espécie de obstáculo que faz a função tender para o infinito[17], e consegue mostrar como um ponto deixa de ser uma simples posição designada do exterior para se tornar algo "em torno do que" podemos caminhar. Isto permite que a natureza do ponto se faça sentir na fronteira de um domínio que pode ser sempre expandida, até se fazer sentir em todo o plano: "é o milagre da holomorfia", diz Châtelet. O motivo da repercussão global é que a natureza do ponto se associa a uma família de circuitos que podemos realizar em torno do ponto e que só se diferenciam pelo número de voltas realizadas por cada um.

"Assim, o recorte de um pequeno círculo impõe ao geômetra um novo plano de trabalho. Considerando um ponto como um *buraco potencial* (...) o geômetra já se propulsou em um outro campo de intuição: o do número de laços e das deformações de contornos" (CHÂTELET, 1993, p.67).

No caso das seções de Poincaré, o gesto é, em um primeiro momento, o que vem

[17]Para a expansão em séries de uma função, se aparece um número finito de termos da forma $f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^n}$, o ponto x_0 é dito um pólo.

aproximar duas situações de dimensões diferentes, instaurando, em dimensões maiores que dois, um novo grau entre o local e o global: a vizinhança das soluções periódicas. Estas soluções são especiais por trazerem consigo uma propriedade simples de invariância, dada pela periodicidade, que contribui para descrever o comportamento das soluções que estão em suas vizinhanças. Uma solução qualquer, que é em princípio infinitamente extensível, deixa-se reduzir, neste caso, a uma descrição finita. Vimos, no terceiro capítulo, como traçamos, em duas dimensões, um arco transversal a uma solução periódica, sobre o qual o ponto correspondente a esta solução é mantido fixo, e analisamos as interseções das outras soluções com este arco. Como estamos em duas dimensões, esta análise é suficiente para uma descrição de caráter global e isto por três motivos: duas soluções não podem se interceptar; as soluções dependem continuamente das condições iniciais; a codimensão do ciclo limite é um e esta é também a dimensão do arco.

Em dimensão três, estudamos as soluções vizinhas a uma solução periódica segundo os mesmos princípios, utilizando fortemente os dois primeiros motivos que continuam válidos, enquanto que à terceira circunstância é adicionado mais um grau de liberdade, que irá permitir uma maior riqueza de comportamento para as trajetórias vizinhas. Dada a dimensão do problema, não faz mais sentido cortar as soluções periódicas por arcos. Cortamos por um plano e estudamos as interseções das trajetórias tridimensionais com este plano. Como as soluções periódicas determinam o aspecto das soluções em suas vizinhanças? Como sua propriedade de invariância é herdada pelas soluções vizinhas, constrangidas pela continuidade do conjunto de soluções?

Em princípio, nada podemos afirmar, imaginando que as trajetórias se aproximam ou se afastam da solução periódica com dois graus de liberdade. Mas examinando estas questões de perto, Poincaré enxerga quais as condições que devemos preencher para garantir um certo conhecimento dos pontos de interseção destas trajetórias com o plano de seção. Não se trata mais de uma estrita periodicidade, mas estes pontos podem formar variedades sobre o plano. Além disso, os pontos que estão sobre uma destas variedades permanecem, por um tempo arbitrário, sobre esta mesma variedade, quando o iteramos pela transformação de pontos, o que dá sentido à, aparentemente insólita, nomenclatura de "variedades invariantes"[18]. É o modo de cortar a solução periódica que nos faz enxergar a propriedade de invariância e isto pode garantir a descrição da vizinhança de uma trajetória fechada, por uma decomposição da dinâmica, cujos desdobramentos são fundamentais na teoria atual.

Mas se, localmente, na vizinhança de um ponto fixo, o aspecto da dinâmica de pontos sobre a seção se assemelha ao comportamento local das trajetórias no caso bidimensional, acontece algo muito distinto quando olhamos para uma vizinhança estendida do ponto fixo: os pontos homoclínicos. Nada nos deixaria prever *a priori* que encontraríamos tal comportamento, mas não se trata tampouco de uma invenção de Poincaré. Este percebe que as soluções periódicas, que eram um fim em si mesmas, devem ser vistas como *brechas* para se penetrar no comportamento global das trajetórias, quando a dimensão do problema é maior que dois: o papel das soluções periódicas se transforma. Exatamente estas brechas farão aparecer, sobre a seção, a imbricação de comportamentos que Poincaré não ousou traçar, pela complexidade que, sabemos hoje, é conseqüência da presença de um ponto homoclínico. Para dar um breve exemplo, a existência de um ponto deste tipo implica a sua multiplicação ao infinito e, como Birkhoff percebeu, a existência de infinitos pontos periódicos.

Se dissermos que a seção de Poincaré vem atualizar uma virtualidade do comportamento das trajetórias, podemos estender a estes métodos o que dizia Châtelet a respeito dos métodos inventados por Cauchy: "encontramos aí toda a riqueza da elasticidade e dos recortes do virtual: ousar um gesto que libera uma nova unidade plástica e que, fazendo repercutir todo um campo, faz alusão a outros gestos (...)"(CHÂTELET, 1993, p.68); mesmo que, no caso do método das seções, os cortes sejam distintos e as conseqüências também.

Como movimento de pensamento, a seção de Poincaré não vem apenas cortar uma solução periódica mas todo o conjunto de soluções, indicando a relevância dos fenômenos de invariância e de recorrência para a determinação do aspecto qualitativo das soluções. Fenômenos estes, que constituem uma realidade intrínseca à dinâmica

[18]Salientamos que a idéia de invariância aqui é um pouco diferente da imobilidade que esta noção parece significar no emprego usual. As *variedades invariantes* são subconjuntos de pontos, movidos pela dinâmica, dos quais os movimentos descrevem uma variedade de pontos a partir dos quais os movimentos permanecerão sobre esta mesma variedade e assim por diante. O adjetivo *invariante* refere-se então aos conjuntos que resistem à multitude de variações que a dinâmica encerra, das quais apenas as direções infinitesimais eram conhecidas.

e são, muitas vezes, a única coisa que se pode dizer sobre ela. Ainda mais que os espaços de que tratamos não possuem nenhuma rigidez estrutural que nos permita passar das propriedades locais às globais sem mudar a natureza do problema.

Se podemos esquecer das seções de Poincaré ao identificarmos uma dinâmica contínua a uma dinâmica discreta, não podemos esquecer que foi sobre estas seções que se revelou possível seccionar o parâmetro, no caso o tempo, instituindo dois momentos, que poderíamos dizer um *antes* e um *depois*. O caráter evolutivo do tempo, quando entendido como parâmetro, deixa-se sempre separar em um antes e um depois que o caracterizam completamente, pelos postulados de continuidade subjacentes. Sobre a seção é o *retornar* que importa e, mesmo que possamos esquecer a seção para caracterizar as recorrências do sistema, isto não diminui a exemplaridade do corte inaugural que elas vêm instituir. Sobretudo porque não podemos esquecer das interseções homoclínicas que se apresentam com a robustez e a insistência de que falaremos no último capítulo.

Acrescentamos um novo aspecto ao *gesto* tal como o havia definido Châtelet: ele pode ser esquecido. Não para sempre, mas para aparecer novamente em um novo momento, como, por exemplo, para seccionar as trajetórias recorrentes de Birkhoff, que virão substituir o papel das soluções periódicas de Poincaré. Não completamente, uma vez que seus desdobramentos persistem e permeiam toda a teoria.

4.2 Breve comentário histórico sobre as variedades invariantes

Considerando uma transformação de superfícies, que já podemos chamar assim após mencionar os trabalhos de Birkhoff, sabemos que Poincaré demonstrou a existência de duas curvas invariantes analíticas quando $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ na equação (I), onde as funções φ e ψ são consideradas analíticas. Como ele só considerou o caso analítico, pôde utilizar o método dos majorantes de Cauchy, o que incitou Hadamard a se perguntar se poderíamos provar o mesmo resultado sem as hipóteses de analiticidade, usando portanto o método de aproximações sucessivas para averiguar até que ponto esta condição é fundamental. Hadamard generaliza, então, o mesmo resultado para o caso em que as ditas funções são consideradas C^1 apenas[19].

Será Sternberg que, em sua tese, irá retomar este problema exatamente do ponto onde o deixou Hadamard, por sugestão de Aurel Winter. Os resultados serão publicados em 1955, em um artigo chamado "*On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation*"(STERNBERG, 1955) onde o autor demonstra que certas condições, um pouco menos restritivas que aquelas consideradas por Hadamard, são, em um certo sentido, as melhores possíveis para garantir a existência e unicidade de curvas invariantes para a transformação de superfícies.

Este problema está intimamente relacionado às questões relativas à linearização que tratamos no segundo capítulo e, por isso mesmo, veremos que, neste período, os atores serão os mesmos. Sternberg publicará em seguida alguns artigos onde trata do problema, o primeiro, de 1957 (STERNBERG, 1957), é o importante trabalho sobre o teorema de linearização de Poincaré. Ele demonstra que:

Seja T uma transformação definida em dimensão n de modo análogo à transformação de superfícies definida pela equação (I). Se temos ainda que p dos respectivos λ_i são menores que um e q são maiores que um, então existem superfícies invariantes passando pela origem de dimensões $n-p$ e $n-q$. Estas "superfícies" invariantes, que são na verdade variedades, têm grau de diferenciabilidade igual à diferenciabilidade da transformação original. Este resultado generaliza os anteriores sobre a existência de curvas invariantes para dimensão qualquer e emprega um teorema sobre existência de conjugações, usado para a obtenção de formas normais, que mantêm invariantes, ainda, as variedades que queremos.

Estes resultados serão também empregados, ou aperfeiçoados, por Hartman. Em um artigo já citado, se a transformação é C^2, é demonstrada a possibilidade de uma linearização C^1, para contrações e para o caso geral em dimensão dois, mesmo se não assumimos as condições de não-ressonância. Na demonstração deste teorema Hartman emprega a existência das variedades invariantes tal como haviam sido demonstradas por Sternberg no artigo sobre o teorema de Poincaré.

A primeira versão do teorema de linearização por um homeomorfismo, demonstrada por Hartman, foi publicada alguns meses após o artigo citado anteriormente. O

[19]E se anulam na origem, bem como suas primeiras derivadas. Um resultado deste tipo também foi encontrado por Lyapunov(CODDINGTON & LEVINSON, 1955, p.333).

que ainda não dissemos, é que esta demonstração depende do resultado de Sternberg sobre a existência das variedades invariantes. Será justamente esta a inovação da demonstração proposta por Pugh para o teorema de Grobman-Hartman: ele não faz uso da existência das variedades invariantes.

Se T é um difeomorfismo e p um ponto fixo hiperbólico de T, usando os conjuntos limite propostos por Birkhoff, definimos a variedade estável de p como o conjunto dos pontos do domínio que têm p como ω-limite, enquanto o conjunto dos pontos que têm p como α-limite é chamado de variedade instável de p; ambas as variedades são invariantes por T. Inversamente à primeira demonstração de Hartman, podemos usar o teorema de Grobman-Hartman para demonstrar que estes conjuntos têm uma estrutura de variedade topológica. No entanto, a prova de que se tratam realmente de variedades diferenciáveis imersas foi dada por Irwin(IRWIN, 1970) e o resultado é conhecido como Teorema da Variedade Estável[20].

4.3 Quando garantimos que existe uma solução periódica?

Os métodos de seção, idéia central deste capítulo, foram usados por Poincaré a partir de uma certa solução periódica. Mas o que garante que uma tal solução existe? No artigo "*Sur les courbes...*" a existência de uma tal solução é assegurada apenas para o caso particular do toro, mas é evidente a sua crença de que sempre podemos supor que tais soluções existem. Ainda não dissemos, com toda a ênfase que esta afirmação merece, que o argumento de Poincaré é fortemente inspirado pelos problemas da mecânica celeste, em particular o problema dos três corpos, que trata justamente de perturbações das órbitas elípticas propostas por Kepler.

Não se trata, de modo algum, de uma intuição vaga; alguns resultados de Poincaré relacionados às soluções particulares do problema dos três corpos legitimam, de um certo modo, que se parta da consideração de que uma solução periódica existe. Estes resultados estão em um artigo publicado em 1883 (POINCARÉ, 1883), isto é, anteriormente à quarta parte do artigo "*Sur les courbes...*" de que tratamos nesta

[20] Obviamente o resultado para a variedade instável é análogo, e aproveitamos para observar que o mesmo teorema mostra ainda que estas variedades possuem o mesmo grau de diferenciabilidade do difeomorfismo.

tese, publicada em 1886.

Neste trabalho, Poincaré demonstra que tinha intuições importantes sobre as técnicas que seriam empregadas posteriormente para se demonstrar a existência de uma solução periódica. As motivações de algumas contribuições de Poincaré ao cálculo de variações, que se desenvolveria posteriormente, têm suas raízes também neste trabalho. Ele começa por enunciar o seguinte teorema:

"Sejam $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, n funções contínuas de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$; a variável x_i é sujeita a variar entre os limites $+a_i$ e $-a_i$. Suponhamos que, para $x_i = a_i$, ξ_i seja constante positiva, e para $x_i = -a_i$ constante negativa; digo que existirá um sistema de valores dos x para o qual todos os ξ se anularão".

Para a demonstração, Poincaré cita um artigo de Kronecker (KRONECKER, 1869). Não entraremos nos detalhes deste resultado mas observamos que ele prenuncia a utilização do argumento sobre a existência de um ponto fixo de uma transformação, para garantir a existência de uma solução periódica de um sistema de equações diferenciais, que já vimos ser uma das ferramentas mais fecundas empregadas por Poincaré. Após a menção do teorema de Kronecker, Poincaré continua, dizendo que para se demonstrar rigorosamente que certas equações podem ser satisfeitas, é suficiente estudar o sinal de certas funções e que, para quantidades pequenas, como o são as massas dos planetas em relação à massa do Sol, o sinal das funções destas quantidades serão os mesmos que na situação inicial, onde estas quantidades são nulas.

Na quarta parte de "*Sur les courbes...*", ele voltará a mencionar o teorema de Kronecker para estudar a distribuição das singularidades nos casos de ordem superior. Poincaré utiliza o índice de Kronecker, mostrando que o índice de uma multiplicidade sem contato só depende de sua ordem de conexão e de sua espécie (positiva ou negativa, segundo os índices dos pontos singulares). Como se trata de propriedades topológicas, podemos esperar que os índices sejam invariantes por transformações contínuas e é justamente o que mostra Poincaré para alguns casos especiais.

Um outro importante procedimento empregado por Poincaré, baseado nas idéias de Hill, consiste em, partindo de uma solução fechada, tomar uma família de soluções obtida pela variação de um certo parâmetro[21] e investigar a solubilidade do problema quando variamos o parâmetro (método de continuação analítica)[22]. O artigo citado de Kronecker inaugura a teoria do grau topológico de uma aplicação[23], e este grau topológico, dado pelo índice, é o que assegura que a solubilidade de uma família de problemas é invariante por perturbações contínuas. Estas propriedades, já usadas por Poincaré, foram sistematizadas e tornaram-se conhecidas com o trabalho de L.E.J. Brouwer(BROUWER, 1912), a quem conhecemos pelo seu teorema topológico do ponto fixo. Os teoremas de existência de um ponto fixo irão constituir um outro método para se estabelecer a existência de uma solução periódica, considerando um ponto fixo sobre uma superfície de seção.

Os resultados relativos à existência de um ponto fixo têm, na verdade, uma longa história, que começa com o método das aproximações sucessivas de Picard, método este citado diversas vezes em nossa tese, e passa por idéias que aparecem no contexto do cálculo das variações. Foge do escopo deste trabalho a análise deste tipo de problema, mas gostaríamos de mencionar apenas aquele que ficou conhecido como "o último teorema geométrico de Poincaré", que foi demonstrado por Birkhoff. Poincaré havia conjecturado em 1912(POINCARÉ, 1912), pouco antes de sua morte, que:

Seja T uma transformação contínua, bijetiva, que preserva área, levando uma região anular do plano nela mesma, sendo esta região limitada por dois círculos concêntricos que cortam o eixo x respectivamente nos pontos a e b ($a > b > 0$). Se esta transformação leva os pontos do círculo referente a $x = a$ em um sentido positivo e o outro em um sentido negativo, existem ao menos dois pontos da região que são mantidos fixos por T.

Na verdade, só é necessário demonstrar a existência de um ponto fixo, visto que o outro segue do teorema do índice, que acabamos de mencionar. O artigo de Poincaré era baseado em considerações de topologia algébrica, mas deixava a demonstração em aberto. Birkhoff não só demonstrou o último teorema de Poincaré, mas, além disso,

[21]O já mencionado resultado de Poincaré sobre a continuidade das soluções em relação a certos parâmetros se insere neste contexto.

[22]Será demonstrado futuramente que o que garante a passagem do argumento de ponto fixo, para garantir a existência de uma solução, à existência de uma tal família é a invariância do índice por perturbações contínuas e é esta invariância que já havia sido demonstrada por Poincaré sob certas hipóteses.

[23]Para todo este parágrafo ver (BROWDER, 1981).

propôs várias generalizações[24].

[24]Sobre os resultados de Birkhoff ver (BIRKHOFF, 1913), (BIRKHOFF, 1925) e (BIRKHOFF, 1931). É interessante notar que, considerando as transformações propostas por Poincaré, Birkhoff encontra curvas especiais como conjuntos invariantes deste tipo de transformação, que podem ser ditas, hoje, *fractais* . Em um primeiro momento ele tenta mostrar que a existência de tais curvas levaria a um absurdo mas, não conseguindo, termina por admitir que sua existência é possível. Sobre estas curvas ver (BIRKHOFF, 1932).

Capítulo 5

Primeiras conclusões

Um momento de gênese de uma idéia matemática assemelha-se ora a uma invenção, ora a uma descoberta e, nesta aparente oposição, se esconde a pergunta sobre a realidade da matemática. Em que sentido a matemática é real? Procuramos mostrar nos capítulos anteriores indícios de que as idéias matemáticas surgem ao mesmo tempo como instâncias abertas, que dão margem a conclusões inesperadas, e como estas mesmas idéias parecem revelar uma necessidade profunda, fazendo com que os resultados pareçam eternos. Do modo como falamos aqui estas noções parecem vagas e desdobrá-las é justamente o objetivo deste capítulo, conquanto não tenhamos a pretensão de apresentar conclusões definitivas ou gerais.

5.1 O inesperado dos resultados de Poincaré e as ligações necessárias do caso integrável

Comparemos, em primeiro lugar, os primeiros resultados obtidos por Poincaré aos casos mais conhecidos anteriormente, nos quais sabíamos escrever sem dificuldade a integral de uma equação diferencial. Um primeiro exemplo tem lugar quando as soluções de uma equação diferencial podem ser consideradas curvas de nível de uma função real[1]. Neste caso, as singularidades serão centros ou colos da equação diferencial.

Ora, se lembrarmos da classificação local das singularidades proposta logo no início do artigo de Poincaré, saberemos que a singularidade de tipo centro é justamente o caso excepcional. Partindo do caso integrável ao qual nos referimos, a riqueza dos

[1] Se a função é finita existe, neste caso, uma integral que é uma integral primeira.

comportamentos locais (no caso mais geral de tipo nó, foco ou colo) é absolutamente inesperada, e o caso integrável corresponde à exceção. Já tínhamos visto, aliás, pela reação de Fouret, um pequeno mas significativo exemplo do efeito que o resultado de Poincaré pode ter tido sobre os pesquisadores de seu tempo.

O segundo exemplo facilmente integrável é obtido quando as soluções podem ser vistas como linhas de declive de um campo gradiente, no qual as trajetórias partem dos cumes e tendem para poços e todas as singularidades da equação diferencial são de tipo nó. Comparemos desta vez esta circunstância aos resultados globais em duas dimensões obtidos por Poincaré, como a afirmação da existência de trajetórias fechadas e a classificação local (toda trajetória que não tende para um nó deve ser uma espiral). Neste caso também o resultado de Poincaré surpreende, se comparado ao exemplo integrável, onde nada poderia nos fazer prever a existência de um ciclo limite[2].

Os dois exemplos nos quais sabíamos integrar explicitamente a equação diferencial diferem essencialmente do que encontramos pela análise direta desta equação, sem o recurso da integração. Sendo assim, se quiséssemos imaginar o aspecto geral das soluções a partir dos casos que sabíamos integrar, seríamos fatalmente conduzidos a um equívoco. Referindo-se aos novos resultados estabelecidos por Poincaré, Hadamard observa que:

"Nada disto podia ser previsto a partir dos exemplos tratados anteriormente. Não somente estes davam uma idéia falsa das coisas; mas, pode-se ver, era inevitável que assim fosse.

Nossos resultados são, com efeito, (...) contraditórios com a existência de uma integral geral que possamos escrever com os procedimentos elementares. Conseqüentemente, eles não poderiam se encontrar nos problemas que tínhamos resolvido antes de Poincaré. Tinha-se uma opinião, até então, baseada sobre figuras excepcionais, degeneradas de certo modo, porque elas eram as únicas que sabíamos traçar" (HADAMARD, 1912b).

[2] Antes de Poincaré, isto já havia sido observado por Hill, de quem falaremos na segunda parte. Há, na verdade, um modo de colocar a equação em coordenadas polares para averiguar a presença de um ciclo limite. No entanto, como observou Hadamard(HADAMARD, 1933), isto pode não parecer surpreendente a partir do momento em que conhecemos o fato, mas ninguém havia pensado nisto antes de Hill e Poincaré.

Com a novidade introduzida pela abordagem qualitativa, os resultados anteriores não são vistos sequer como casos particulares, mas como casos excepcionais do que deve ocorrer em geral. A razão disto reside nos novos métodos introduzidos por Poincaré, oriundos também do modo como este matemático se serve dos métodos tradicionais[3].

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos estuda as trajetórias em si mesmas e, quando o sistema possui uma "integral"[4], o problema de que tratamos pode ser reduzido a um problema sobre a função integral, permitindo-nos empregar as ferramentas da Teoria das Funções. Em particular, se estamos interessados em uma análise local da vizinhança das singularidades, o problema pode se inserir, mais especificamente, na Teoria das Singularidades.

Todos estes substantivos próprios, nós os usamos apenas com o intuito de mostrar como alguns dos resultados que vimos até aqui possuem parentescos com importantes teoremas destas teorias. Podemos citar, por exemplo, o lema de Morse que classifica o comportamento local das funções reais na vizinhança de suas singularidades. Sabemos que uma classificação se faz com base em uma certa noção de equivalência que é, neste exemplo, um difeomorfismo. Já havíamos comentado, quando falamos do teorema de Sternberg, que são bastante restritivas as condições para que se tenha uma linearização local, de um sistema dinâmico qualquer, por um difeomorfismo. No entanto, para sistemas integráveis (caso hamiltoniano), a linearização por um difeomorfismo é possível no caso geral[5] e este resultado é análogo ao lema de Morse aplicado à "integral" (hamiltoniano) do sistema.

Mas se olhamos a Teoria dos Sistemas Dinâmicos do ponto de vista mais geral, onde os sistemas integráveis são excepcionais, o papel que o lema de Morse possui na Teoria das Singularidades será exercido pelo teorema de Grobman-Hartman, posto que este teorema nos informa sobre o aspecto local no caso mais geral possível, ou

[3] Às vezes as técnicas empregadas importam menos que o emprego que delas fazemos; a aplicação de uma ferramenta clássica em um domínio que a desconhece pode participar igualmente de um movimento criativo.

[4] Falamos aqui de uma integral no sentido mais usual. Como não o definimos, colocamos este termo entre aspas, uma vez que o que nos importa, neste momento, é apenas reter a idéia de que há uma função que *resolve* o problema.

[5] Isto porque a terceira hipótese da tese de Poincaré (não ressonância dos autovalores) pode ser vista como uma condição de integrabilidade.

seja, nas vizinhanças das singularidades hiperbólicas. Mesmo que em vista desta generalidade a linearização deva ser feita por um homeomorfismo. Queremos dizer que o teorema de Sternberg é matematicamente equivalente ao lema de Morse, mas que o teorema de Grobman-Hartman, na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, exerce o *papel* do lema de Morse.

Podemos pensar em separar os problemas em diferentes planos: o das funções—que compreende as "integrais"; e o dos sistemas dinâmicos de modo geral. Sublinhamos que esta separação não visa a identificação de objetos matemáticos distintos, mas a diferenciação dos problemas que envolvem tais objetos. Sabemos, por exemplo, que em cada um destes âmbitos a palavra *solução*, associada a uma equação diferencial, possui significados distintos. Na verdade, a separação de tais domínios nos importa muito menos que a busca das ligações que eles mantém.

A constituição de um domínio autônomo para as soluções de uma equação diferencial, que visa diretamente as curvas que ela define, sem procurar remeter essas soluções à busca de uma função integral, força a procura das definições mais adaptadas e o estabelecimento de novos métodos. Mas as dificuldades específicas, que são intrínsecas a este domínio de coisas, irão forjar tais ferramentas e, uma vez que os mesmos métodos nos permitem penetrar na natureza profunda dos conjuntos de trajetórias, verdades inesperadas e surpreendentes nos aguardam.

Procuramos dar alguns exemplos de como isto aconteceu em relação à análise qualitativa de Poincaré. O processo que descrevemos acima é, com efeito, o que há de turvo na procura de novas verdades em matemática. A seguinte citação, de André Weil, é especialmente intrigante quando fala do contato cotidiano do matemático com o que há de obscuro no universo de que ele trata:

"Nada é mais fecundo, todos os matemáticos o sabem, que estas obscuras analogias, estes turvos reflexos de uma teoria sobre a outra, estas carícias furtivas, estas névoas inexplicáveis; nada dá tanto prazer ao pesquisador. Chega o dia em que a ilusão se dissipa ; o pressentimento se torna certeza.

(...)

Felizmente para os pesquisadores, à medida em que as névoas se dissipam sobre um ponto, é para se reformarem sobre um outro"(WEIL, n.d.).

Mas se falamos da novidade absoluta e surpreendente de certos resultados que indicam uma abertura infinita para conclusões que o matemático não pode prever, não podemos deixar de perceber, uma vez encontrados os resultados, que as verdades matemáticas parecem se encadear de modo necessário. Este traço de necessidade iremos reencontrar, por exemplo, na ligação que mantém os domínios que separamos acima- o das funções integrais e o dos sistemas dinâmicos. O que parece estar por trás das rígidas condições exigidas pelo teorema de Sternberg é o fato de que, de um certo modo, elas nos remetem aos sistemas integráveis. A exigência de uma linearização diferenciável parece pertencer ao âmbito da Teoria das Funções enquanto, as noções de equivalência topológicas se adequam melhor aos Sistemas Dinâmicos. Esta conclusão parece, ao mesmo tempo, óbvia e discutível. Vimos, no processo histórico, que a introdução da topologia não se deu de caso pensado, mas ela nos parece bastante natural. Por outro lado, conhecemos hoje os limites da aplicação dos métodos topológicos no estudo dos sistemas dinâmicos.

5.2 Esquemas de estrutura e esquemas de gênese

Nesta seção, iremos nos inspirar essencialmente na filosofia da matemática de Albert Lautman, em particular na tese *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*(LAUTMAN, 1938). Este trabalho desenvolve, de modo bastante profundo, a filosofia intrínseca a certas teorias matemáticas de seu tempo, identificando onde se apresentam relações de estrutura entre seres matemáticos distintos e como as propriedades de um certo domínio se relacionam à gênese de um ser matemático sobre este domínio.

Para pensar, por exemplo, as implicações entre o local e o global, Lautman analisa o teorema de Herman Weyl, que afirma que um grupo linear compacto de coeficientes reais deve deixar invariante uma forma quadrática definida positiva. Sua importância para o autor se deve ao fato de que este resultado estabelece uma ponte entre a possibilidade de uma métrica local, que define um espaço riemanniano, e uma propriedade global do grupo. A compacidade é uma propriedade global da variedade definida pelo grupo e revela, segundo Lautman, uma característica de "conclusão"[6]("*achèvement*").

[6]Poderíamos dizer também "remate".

Este filósofo postula, então, que a solidariedade entre o local e o global irá depender, em geral, de uma característica de "conclusão", também encontrada em outros exemplos. Podemos dizer, para o teorema citado, que esta propriedade vive em um certo domínio e organiza de modo particular a estrutura local de um outro domínio.

Alguns trabalhos de Elie Cartan sobre o teorema de Weyl visam estendê-los aos grupos de Klein a fim de revelar a profunda ligação existente entre a geometria de Klein e a geometria de Riemann. Tivemos a oportunidade de observar a influência que as pesquisas de Cartan sobre os grupos contínuos exerceram sobre Sternberg, mas as aproximações que podemos fazer entre o que dissemos no parágrafo acima e os teoremas de linearização não param por aí. Neste tipo de resultado local, a possibilidade de aproximação por um sistema linear depende de propriedades do grupo das transformações que serão empregadas como mudança de coordenadas. Obviamente, não há uma analogia direta entre os casos do teorema de Weyl e os teoremas de linearização local. Os grupos de que tratamos nos problemas de linearização não precisam gozar de uma propriedade tão forte quanto a compacidade.

Observamos o quanto a possibilidade de resolução do problema por um difeomorfismo ou homeomorfismo local está ligada à estrutura do grupo formado por estas transformações. No caso dos homeomorfismos locais contrativos em dimensão n, já mencionamos que eles serão todos equivalentes entre si (a menos de um homeomorfismo) se uma certa condição sobre os homeomorfismos da esfera de dimensão $n-1$ for satisfeita. Esta condição é que o grupo de homeomorfismos da esfera seja conexo por arcos. O problema da linearização local de contrações, se não exigimos nenhuma condição de diferenciabilidade, possui natureza distinta do problema diferenciável, e as suas condições de resolução dependem de uma propriedade de conectividade do grupo associado. Não podemos mais dizer, portanto, que se trata de uma propriedade de "conclusão", como era o caso da compacidade que, no exemplo analisado por Lautman, faz-se necessária em todo problema de passagem do local ao global. Duas conclusões podem ser tiradas: a primeira, é que se trata de um problema realmente local e a segunda, que a propriedade de conectividade indica a presença de uma questão relativa à *aproximação*. Mas mais do que isto, sabemos que a diferenciabilidade impõe uma estrutura.

A diferença fundamental entre os grupos com que lidamos em nossos problemas de linearização e os do exemplo de Lautman é que os nossos possuem dimensão infinita. Para as contrações, no caso diferenciável, vimos que a possibilidade de linearização local está associada à propriedade, do grupo das contrações, de que os germes formem um sub-grupo finito algébrico[7]. Comentamos, no parágrafo anterior, qual o efeito de eliminarmos a hipótese de diferenciabilidade e, no próximo, observaremos o que acontecerá se desprezarmos a hipótese de que se tratam de contrações, caso que, como já sabemos, irá desembocar no teorema de Grobman-Hartman.

Haveria muitas outras coisas a serem ditas sobre o problema das linearizações por transformações diferenciáveis, mas nosso interesse principal é chegar até às linearizações topológicas. Neste caso, onde temos o teorema de Grobman-Hartman, a possibilidade de linearização é dada pela hiperbolicidade. Esta parece ser, em princípio, apenas uma condição sobre os autovalores do campo que define o sistema dinâmico. Condição à qual sabemos estar relacionada a possibilidade de decomposição da dinâmica. Queremos investigar, no entanto, como fizemos com os exemplos anteriores, qual a sua contrapartida na estrutura dos espaços de transformações que empregamos para linearizar. Os espaços de homeomorfismos, além de dimensão infinita, possuem muito menos rigidez em sua estrutura que os citados acima e nós postulamos que, na verdade, aqui parece estar em jogo uma questão que não é relativa à estrutura, ou, pelo menos, não do mesmo modo que nos outros exemplos.

Nos *esquemas de estrutura*, Lautman procura explicitar a "solidariedade quase orgânica" que existe entre diferentes seres matemáticos que, quanto à dualidade aparente entre o local e o global, leva as partes a se organizarem em um todo e o todo a se refletir sobre as partes. Uma das motivações deste filósofo está relacionada às concepções estrutural e dinâmica da matemática, que parecem, em princípio, opostas. Ele buscará aliar estas duas visões, mostrando as relações profundas entre a fixidez das estruturas tomadas independentemente, e a potência infinita das ligações entre teoremas e teorias distintas, onde reside a possibilidade de expansão da matemática para além de todo e qualquer limite determinado *a priori*.

Se os esquemas de estrutura já servem a este propósito, estas ligações ficarão

[7] O que traz a rigidez de estrutura de que necessitamos para linearizar com uma noção mais fina, diferenciável, como citamos no segundo capítulo.

ainda mais claras nos *esquemas de gênese*. A segunda parte da tese de Lautman é dedicada à noção de existência em matemática. Trata-se de saber como a estrutura de um ser matemático pode ser interpretada em termos de existência para outros seres e como alguns, dentre estes últimos, se distinguem por certas características excepcionais. Um importante esquema de gênese, analisado por Lautman, aparece na teoria das funções algébricas de Riemann onde a existência de integrais para estas funções depende da topologia da superfície onde elas estão definidas. Dependendo apenas do *genus* da superfície, podemos obter resultados de existência.

Mas, dos exemplos estudados por Lautman, o último teorema de Poincaré irá nos interessar particularmente. Este resultado, que mencionamos no quarto capítulo, exprime também um esquema de gênese quando afirma que a existência de um ser especial depende da estrutura do domínio onde este ser se insere, mas também, e principalmente, de propriedades de outros seres aos quais ele irá se associar. Falamos da existência de um ponto fixo, que é em princípio um ponto do domínio como outro ponto qualquer, mas que será também o ponto especial que é mantido fixo por uma certa transformação. Nas condições do último teorema de Poincaré, é preciso que esta transformação conserve um invariante integral do domínio (área), para garantir a existência do ponto fixo. A existência de um ser especial (ponto fixo) depende assim da estrutura do domínio e das propriedades da transformação.

As propriedades de máximo e de mínimo também nos permitem distinguir um elemento do domínio e, na verdade, os teoremas sobre a existência do ponto fixo se ligam a este problema. Já mencionamos que a procura de trajetórias fechadas (por exemplo como soluções particulares do problema dos três corpos) se associa a um problema de máximo e de mínimo no cálculo das variações. Temos plena consciência, desde as seções de Poincaré, de que a existência do ponto fixo de uma transformação pode ser interpretada imediatamente como existência de uma trajetória fechada (solução periódica do sistema). O teorema topológico de Brouwer, cuja demonstração se associa às propriedades utilizadas por Poincaré na busca de soluções periódicas, vem resumir a um só os diferentes casos citados anteriormente, ao afirmar a existência de um ponto fixo para qualquer transformação contrativa definida em espaços bastante gerais.

Feitas estas observações, podemos retornar ao teorema de Grobman-Hartman para observar que nele estão em jogo vários dos esquemas por nós mencionados. Mas gostaríamos sobretudo de dizer que nele não estão presentes apenas esquemas de estrutura, mas esquemas de gênese. O modo de contornar a pouca estrutura de um espaço de homeomorfismos é decompô-lo o máximo possível e procurar seres especiais, que serão pontos fixos em um espaço funcional. O papel da condição de hiperbolicidade vai se inserir justamente na possibilidade desta decomposição.

Já comentamos que a demonstração apresentada por Hartman faz uso das variedades invariantes. A hiperbolicidade permite a decomposição da dinâmica em uma componente expansiva e uma componente contrativa. Podemos, então, usar o teorema sobre a existência do ponto fixo para contrações sobre ambas as variedades (no caso da componente expansiva consideramos a inversa da transformação para obtermos uma contração). Teoremas de ponto fixo, que indicam esquemas de gênese, participam para garantir a existência de uma linearização local, mesmo nas demonstrações atuais do teorema de Grobman-Hartman, que não fazem uso da existência das variedades invariantes.

5.3 A realidade matemática

Falamos diversas vezes em *realidade matemática* e nesta seção confessaremos as motivações profundas que nos levam a postular uma realidade para a matemática que é independente do mundo sensível. Quando não se tem um contato íntimo com o *fazer* matemático, pensa-se que as idéias desta disciplina são inspiradas pelas aplicações às quais ela estaria destinada. Questiona-se, freqüentemente, a relação entre a matemática e a realidade, pergunta que concebe a palavra "realidade" implicitamente associada ao mundo sensível. Não é raro, em uma situação pedagógica, sermos questionados sobre a utilidade da matemática ou lançarmos mão de um caso "concreto" onde uma certa idéia possa ser compreendida. Sem visarmos a importância pedagógica de tal procedimento, pensamos que tal redução é um empobrecimento ao mesmo tempo que um desconhecimento profundo do que é a matemática e de como surgem, ou se encadeiam, as idéias que a compõem.

Não podemos desprezar a influência das aplicações científicas, principalmente da física, na construção da matemática. Temos muitos exemplos históricos de desenvolvimentos matemáticos que se inspiraram em problemas físicos ou astronômicos, como iremos observar na segunda parte. Não é, no entanto, no âmbito da cultura, ou da história, que nos posicionamos quando afirmamos que a matemática é uma disciplina autônoma, cuja realidade, que não se identifica com seus efeitos, é absolutamente independente da realidade do mundo físico[8].

A rigor, quando evocadas as aplicações, podemos dizer que a matemática não *serve* para nada, sempre que o verbo *servir* for empregado para designar a intencionalidade de uma teoria matemática na direção das aplicações. Esta afirmação não quer dizer que ela não possa ser aplicada, mas que seus resultados não se destinam, em princípio, às aplicações. Mais que isto, é justamente o fato de que a matemática é independente do mundo sensível que fornece as condições de possibilidade para que ela possa ser aplicada na compreensão deste mundo.

Defendemos que a realidade da matemática não precisa ser decalcada sobre a realidade da natureza, bem como a realidade da natureza não se deixa decalcar sobre a realidade matemática. Dito isto, podemos deixar as oposições de lado para investigar, de modo mais afirmativo, que traços nos permitem falar de *realidade* da matemática.

5.3.1 A resistência da realidade matemática ou O pensamento de Jean Cavaillès

"Pensa-se freqüentemente que os problemas colocados aos matemáticos só podem vir das aplicações. É verdade que certas aplicações foram a ocasião de descobertas importantes e da produção de novos conceitos. (...) Mas as matemáticas têm também sua dinâmica autônoma; elas produzem problemas freqüentemente muito difíceis e profundos pelo seu desenvolvimento interno (...).

Alguns crêem também que as matemáticas não têm sentido em si mesmas, que elas seriam uma linguagem vazia que só adquire um sentido nas aplicações. Esta idéia é ligada à crença de que as matemáticas não têm objeto, uma vez que elas não tratam do mundo sensível. Pode-se defender, ao contrário, que as matemáticas

[8]Aliás, sequer a própria física se limita à realidade sensível, uma vez que é uma atividade de pensamento. Michel Paty analisou o caráter problemático e realista da criação em qualquer domínio científico, em particular, na física: o conhecimento científico não se esgota no seu conteúdo nem nos seus efeitos. Ver (PATY, 1998b) e (PATY, 1999).

têm os objetos mais reais possíveis, como, por exemplo, os números. Estes objetos, mesmo que produzidos na idéia, são reais, no sentido de que eles *resistem*: não se faz deles o que se quer e eles encerram muitas propriedades escondidas. Além disso, os enunciados que exprimem suas propriedades têm uma estabilidade que não é atingida em nenhuma outra disciplina"[9].

Esta citação encontra-se no dicionário de ciências *Le Trésor des Sciences* (SERRES & FAROUKI, 1997) no verbete "*mathématiques*", cuja definição foi escrita por Christian Houzel. Vemos nela explicitados vários pontos nos quais tocamos anteriormente e, do que ela traz de novo, interessa-nos em particular esta noção de *resistência*. Os objetos matemáticos são reais porque resistem. Quando desejamos dizer qualquer coisa sobre eles devemos nos aproximar de sua natureza, sendo exatamente esta a razão da sensação de que a aproximação destes objetos parece mais uma descoberta que uma invenção. Mas por outro lado, é inegável, como procuramos mostrar nos capítulos anteriores, que o processo de descoberta de uma nova verdade matemática é um movimento criativo. Daí a impressão ambígua de que inventamos e descobrimos ao mesmo tempo.

Ao contrário do que possa parecer, não há contradição alguma no que acabamos de dizer. Já observamos, a partir de alguns exemplos, que o ponto de vista da descoberta é produto da constatação da *necessidade* das verdades matemáticas enquanto que a invenção é possibilitada pela abertura infinita da matéria matemática, onde o pesquisador penetra para trazer novas verdades. A criação e a necessidade são os ingredientes fundamentais na gênese de uma idéia matemática.

Percorrer as inflexões do pensamento matemático para desvelar a *necessidade* escondida de suas idéias foi o objetivo da obra de Jean Cavaillès. Este grande filósofo e matemático francês se insere, juntamente com Albert Lautman, em um momento particularmente brilhante da filosofia da matemática que teve lugar, privilegiadamente na França, antes da Segunda Guerra Mundial[10].

[9]Grifo nosso.

[10]Cavaillès era professor na Sorbonne quando da ocupação alemã que deu origem à Resistência francesa. Neste momento, apesar de bastante jovem, ele já era considerado "um dos poucos filósofos no mundo capazes de ter acesso às mais altas especulações do espírito", como afirma Raymond Aron no prefácio da publicação póstuma de algumas de suas obras(CAVAILLÈS, 1962). Apesar das pressões para que não se arriscasse, Cavaillès se engajou de corpo e alma ao lado da Resistência e acabou por ser assassinado. Durante este mesmo período, foi entregue aos nazistas seu amigo

"As sinuosidades do processo de revelação estariam em relação com a estrutura das partes reveladas. Dito de outro modo, há uma objetividade, fundada matematicamente, do devir matemático; é a exigência de um problema que obriga a desprover um método de acidentes que nenhuma reflexão percebia como inúteis, é o vigor interno de um método que ultrapassa seu campo primitivo de aplicação e coloca novos problemas"(CAVAILLÈS, 1962, p.28).

As palavras de Cavaillès nos dão uma idéia do inesperado e da necessidade como faces de um mesmo processo. Mais ainda: a potência de um método se mede pela sua possibilidade de ultrapassar o âmbito de solução para o qual ele foi criado, para colocar novos problemas. De tudo que escrevemos até este capítulo há um pano de fundo que consiste na observação de que os métodos qualitativos para a resolução de equações diferenciais não oferecem uma resposta para um antigo problema, ou nem mesmo uma nova resposta para ele, na realidade, eles mudam a pergunta. Os métodos que foram criados, a princípio, para responder questões pontuais sobre o comportamento das soluções de certas equações diferenciais evoluíram, encadeando-se de forma autônoma para constituir uma teoria[11]. Por este motivo, podemos hoje falar, separadamente, de dois campos da matemática: Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos.

Da realidade matemática participam os fatos, os objetos, os enunciados, as teorias e as idéias matemáticas[12]. Os fatos e os objetos matemáticos oferecem resistência aos movimentos de tematização que virão engendrar uma teoria. Já vimos exemplos de certos fatos ou objetos que aparecem inicialmente como excepcionais e acabam revelam-se posteriormente um conceito unificador para uma determinada teoria. Um exemplo disto são os conjuntos que aparecem no estudo dos homeomorfismos

Albert Lautman, com quem, além da visão sobre a matemática, tinha muitas afinidades políticas. As razões evocadas para que não se participe em um movimento de resistência como este incluem, invariavelmente, a discussão da eficácia desta luta e a importância da participação de alguém que tanto teria ainda a contribuir se permanecesse vivo. A tais argumentos, Cavaillès respondia apenas que não podia agir de outro modo: não fazia isto por escolha, mas por *necessidade*. Ele insistia, como nos conta Raymond Aron, sobre a posição ética de que era esta mesma necessidade que comandava os imperativos práticos e as proposições científicas. Com um pensamento que não é independente de suas proposições sobre o estatuto das idéias matemáticas, Cavaillès nos ensina que a atitude política ultrapassa o dever de engajamento motivado pelo valor moral dos fins, mas é um modo necessário, que afirma uma maneira de se estar no mundo...mesmo após a morte.

[11]Mesmo as motivações iniciais de Poincaré— as informações que os novos métodos poderiam trazer para o emprego dos tradicionais ou as suas aplicações à mecânica celeste— não dão conta da independência dos problemas viriam a se colocar.

[12]Esta enumeração é inspirada em Lautman, principalmente no que concerne às idéias que, como falaremos mais tarde, ultrapassam os resultados matemáticos.

do círculo[13], dos quais Poincaré percebe a necessidade de investigar a possibilidade de serem conjuntos perfeitos e descontínuos, como os conjuntos que virão a ser redescobertos por Cantor em outro contexto. Conjuntos com propriedades semelhantes ultrapassam este contexto, mostrando-se bastante gerais na Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Sobre fatos e objetos que parecem, à primeira vista, excepcionais, Poincaré afirmava que:

"Uma palavra bem escolhida basta freqüentemente para fazer desaparecer as exceções que comportavam as regras enunciadas na antiga linguagem; é por isso que imaginamos as quantidades negativas, as quantidades imaginárias, os pontos no infinito, o que sei ainda? E as exceções, não esqueçamos, são perniciosas, porque elas escondem as leis"(POINCARÉ, 1908a).

Mas há também o movimento inverso. Saberes constituídos que se tornam excepcionais dentro de um outro campo, expandido. Foi o caso dos exemplos integráveis comentados no início deste capítulo, onde vemos que não se deve de modo algum à verdade ou à falsidade dos antigos resultados o fato deles se tornarem casos particulares em uma nova teoria. É um índice fundamental da realidade matemática a ligação profunda que mantêm resultados e teorias distintas. Esta rede possui uma consistência própria, que não pode ser dada nem pelo domínio empírico, nem pela consciência do matemático. Os esquemas de estrutura e de gênese que se deflagram neste enredamento de resultados e teorias, como exemplificamos na seção anterior, trazem à tona as ligações intrínsecas que atestam a realidade das idéias com que lidamos quando fazemos matemática.

A clareza estrutural destas ligações só pode ser enxergada após ter sido estabelecida. No momento da invenção, são turvos os reflexos que nos guiam para resultados, muitas vezes, imprevisíveis. Isto impede toda tentativa de unificação estrutural da matemática por analogia ou justaposição, onde as antigas teorias seriam apenas casos particulares das novas. A matemática não se esgota tampouco em uma extensão unificadora e progressiva de teorias. Evidente que a analogia exerce um papel importante, mas ele se dá apenas na intuição primitiva ou na análise exterior dos resultados.

[13]No estudo do toro que analisamos no terceiro capítulo.

Falamos, no primeiro capítulo, do novo estatuto da noção de função, que perpassa desde a análise qualitativa das equações diferenciais até o cálculo funcional; funções que virão ocupar o lugar dos números como objetos privilegiados da matemática. Mas a simples analogia não seria suficiente para justificar a substituição hierárquica dos números pelas funções, substituição esta que possibilitará a evolução da noção de função, como operações sobre números para a necessidade de se operar sobre as funções elas mesmas, procedimento que poderia se repetir ao infinito[14]. Se podemos operar sobre certos objetos matemáticos e estas operações tornaram-se objetos, como as funções, há aí um desenvolvimento que não é previsível. Se existe uma dualidade subjacente à separação entre objetos e operações, a sua síntese se dá por um esforço criativo do pensamento matemático.

Importante notar que quando dizemos "pensamento matemático" estamos nos referindo àquilo que a matemática "pensa" por si mesma quando engendra seus objetos e encontra suas ligações, o que difere radicalmente de uma reflexão "sobre" a matemática, que só pode ter lugar *a posteriori* e referir-se à matemática já feita. No momento da gênese de uma idéia matemática, a relação estrutural necessária não estava pronta em algum outro lugar: a necessidade se funda no momento da gênese. Isto introduz uma distância entre o que chamamos realidade matemática e o modo como a filosofia platônica a concebe. O leitor já deve ter se perguntado, a esta altura, se não concebemos uma realidade ideal. Neste momento, não iremos aprofundar esta discussão, que, no entanto, irá reaparecer na conclusão; mas gostaríamos de salientar aqui que é justamente a matemática concebida como pensamento que nos afasta da idealidade platônica.

Um pensamento que se move, não tendo a fixidez das idéias, e que, por outro lado, não se esgota no sensível. Este movimento irá constituir o que Cavaillès chama de "campos temáticos", que não se situam fora do mundo, mas são transformações deste mundo. Cavaillès sustenta que a tematização matemática não exclui o sensível mas, ao contrário, torna-o apreensível pela possibilidade de agirmos sobre ele. Esta ação é o *gesto*[15]. Se queremos compreender como se engendram os fatos matemáticos, os

[14] Hadamard já observava a insuficiência da analogia, neste contexto, em seu artigo sobre o Cálculo Funcional(HADAMARD, 1912a).

[15] Falamos no quarto capítulo de *gesto* na obra de Gilles Châtelet, noção que é explicita e profundamente inspirada em Cavaillès.

objetos, os enunciados sobre estes objetos e sua ligação particular com outros objetos e outros fatos, Cavaillès nos ensina que "compreender é perceber deles o gesto e poder continuar". Pois em seguida os objetos abstratos obtidos por gestos serão passíveis de outros gestos, não de um modo qualquer, mas de acordo com a intuição central de certas ligações singulares. Tal é o sentido de uma tematização para Cavaillès.

Tivemos um exemplo de tematização quando falamos da linearização. A noção de equivalência que usamos é uma conjugação entre duas transformações, portanto, uma operação que é, neste caso, de mudança de coordenadas. Se cada sistema é definido, por exemplo, por uma transformação de pontos, a mudança de coordenadas é uma transformação de transformações. Tomamos assim este objeto (transformação de mudança de coordenadas) e agimos sobre ele delineando uma estrutura no conjunto das transformações. De fato, vimos como a possibilidade de linearização por transformações de um certo tipo depende da estrutura de grupo do conjunto destas transformações tomado em si mesmos, sem necessidade de referência aos sistemas específicos onde iremos aplicar as transformações que o compõem. Quando falamos dos esquemas de estrutura, observamos que Lautman menciona a topologia do conjunto das transformações para garantir a passagem de um problema local a um problema global e notamos, em particular, a necessidade da compacidade no teorema de Herman Weyl. Cavaillès citará justamente a topologia das transformações, a partir desta análise feita por Lautman, como exemplo de tematização.

Um outro momento em que Lautman se aproxima do ponto de vista de Cavaillès pode ser encontrado em um dos esquemas de gênese que citamos, a saber o trabalho de Riemann sobre as funções algébricas. Vimos que a decomposição da superfície, constrita pelo gênero, dá origem aos seres que serão definidos sobre esta superfície. Lautman precisa que a gênese em questão é "o ato pelo qual conferimos à estrutura uma dupla interpretação", no caso, o gênero que é interpretado, ao mesmo tempo, como possibilidade de decomposição da superfície e como condição da definição de funções sobre esta superfície.

Pertencendo a um esquema de gênese, este ato é um *gesto*.

O mesmo acontece com o método das seções de Poincaré, ainda que de maneira um pouco diferente. Que um ponto fixo sobre a superfície de seção seja imediatamente interpretável em termos da existência de uma solução periódica da equação diferencial— solução que tem um papel centralizador na descrição das trajetórias vizinhas— é conseqüência de um gesto fundamental: as seções de Poincaré. Mas a múltipla interpretabilidade de um ponto fixo não é a única circunstância que faz das seções de Poincaré um gesto. Vimos que ele terá como conseqüência a individuação de propriedades de invariância fundamentais no desenvolvimento futuro da teoria: as variedades invariantes. Os inúmeros desdobramentos deste método de seções, como a definição de um sistema dinâmico discreto, só vêm confirmar a inesgotabilidade do gesto. Além disso, o *gesto* que operou uma mudança no papel das soluções periódicas, nos permite entrever comportamentos inesperados sobre a seção, indicados pela presença de um ponto homoclínico.

Quando falamos de um "ato" este não pode ser um ato qualquer. A gênese não pode jamais proceder de um ato indiferenciado e sim de um gesto singular que, mesmo se posicionando do lado da intuição, gera toda tematização futura que irá constituir uma teoria[16]. Tomando de empréstimo a definição de Gilles Châtelet, a diferença entre um *ato* e um *gesto* é que o primeiro se esgota na sua efetuação enquanto o segundo é passível de infinitos desdobramentos, que podem ser imprevistos.

5.3.2 A insistência dos problemas ou A filosofia de Albert Lautman

"Muitas vezes já acreditamos ter resolvido todos os problemas, ou, pelo menos, ter feito o inventário daqueles que comportam uma solução. Depois o sentido da palavra solução alargou-se, os problemas insolúveis tornaram-se os mais interessantes de todos e outros problemas se colocaram, os quais não tínhamos suspeitado"(POINCARÉ, 1908a).

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos é produto de uma nova concepção da palavra solução, quando esta vem associada a uma equação diferencial. O próprio Poincaré já havia previsto, em outros campos da matemática, que a possibilidade de uma nova teoria baseia-se na independência dos métodos e na abertura da matemática para a concepção de novas qualidades de solução.

[16] Podemos dizer que a teoria é o que, no ato inicial, está em fase de gestação.

Mas se falamos de solução, falamos implicitamente de problema e nos debruçaremos um instante sobre esta noção. Utilizamos freqüentemente a palavra "problema" em epistemologia para considerar certos aspectos de uma teoria científica, sejam aspectos intrínsecos ou relativos às suas conseqüências na natureza ou na filosofia. Mas não é exatamente neste sentido que a empregaremos aqui. O que realmente buscaremos investigar, associa-se à noção de problema como elemento genético, fundador das teorias matemáticas.

Em seu prefácio à edição das obras de Riemann, ao especular sobre qual seria um guia seguro da matemática que, em princípio, pode parecer arbitrária, Félix Klein recorre aos problemas:

"A matemática pura progride à medida em que os problemas conhecidos são aprofundados em detalhe segundo novos métodos. À medida em que compreendemos melhor os problemas antigos, os novos se apresentam por si mesmos"(KLEIN, n.d., p.21).

Há um movimento de problemas e soluções que mudam incessantemente de natureza e nosso objetivo será o de sustentar que o único motor essencial da matemática são os problemas que ela vem ao mesmo tempo colocar e resolver.

Para dar uma idéia histórica da noção de problema, mencionaremos brevemente o *Comentário sobre o primeiro livro de Euclides*, de Proclus(PROCLUS, 1970). Nesta obra, os problemas e teoremas colocados por Euclides são analisados e o autor distingue os primeiros por seu caráter temporal. Enquanto os teoremas exprimem as propriedades eternas dos seres matemáticos (*a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos*), os problemas indicam um ignorância provisória (*como inscrever um triângulo retângulo em uma circunferência dada*?). É exatamente por suas propriedades temporais que os problemas devem ser posicionados em uma porção inferior à que cabe aos teoremas no diagrama da linha de Platão, que comentamos no segundo capítulo (ambos sendo localizados na parte que cabe aos objetos matemáticos: entre o sensível e a parte superior do inteligível).

Segundo Émile Bréhier, em um texto sobre a noção de problema em filosofia (BRÉHIER, 1955a), será apenas com Aristóteles que a palavra problema irá adquirir uma conotação filosófica, essencialmente dialética, que se expressa pela alternativa entre uma certa asserção e seu contrário. Brehier termina por resumir os problemas, no seio de um pensamento filosófico, como um momento do conjunto que obtemos tomando sua colocação e sua solução. É este último aspecto que irá nos interessar em especial: a inseparabilidade entre a colocação e a solução de um problema.

Iremos afirmar ao mesmo tempo a diferença de natureza entre a instância problema e a instância solução e as suas relações intrínsecas. Lautman fará da noção de problema um leitmotiv de sua filosofia da matemática e podemos resumir como segue o estatuto do problema:

Diferença de natureza entre o âmbito dos problemas e o âmbito das soluções;

Imanência do problema nas soluções que engendra;

Trascendência do problema em relação às suas soluções[17].

Para falar destas propriedades, Lautman cita justamente o artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*". Mais especificamente o resultado de Poincaré sobre a repartição das singularidades, de que falamos no terceiro capítulo. Afirmávamos, então, que há uma diferença de natureza entre o âmbito da equação diferencial (posição do problema) e o das suas soluções(soluções do problema). Isto motiva a asserção de que o problema possui um interesse em si e não se classifica apenas como um estágio transitório da ignorância de suas soluções.

Mas as singularidades, de fato soluções especiais da equação, funcionam como centros organizadores para a descrição do conjunto de soluções e Poincaré demonstra que a existência e repatição destas singularidades depende da característica de Euler da superfície onde o campo de vetores está definido, sendo, portanto, um invariante topológico da superfície. Se associamos esta propriedade a um dos dois âmbitos postulados por Lautman, ela se insere no domínio de definição da equação diferencial, ou seja, no âmbito do problema. É claro que a natureza das soluções depende da equação, mas falamos aqui de algo mais: a repartição de certas soluções especiais está aprioristicamente determinada ao escolhermos a superfície na qual iremos definir a equação diferencial. Temos um princípio de solução dado na definição do problema que é anterior à determinação efetiva das soluções.

[17]Podemos ter, por exemplo, um problema com várias soluções distintas.

Na realidade, a noção de problema, para Lautman, ultrapassa o problema puramente matemático. O problema é um elemento extra-matemático que se constitui como o único *a priori* da matemática. Aos que defendem a supremacia da lógica, Lautman responde que "a lógica verdadeira não é *a priori* em relação à matemática, mas é necessário à lógica uma matemática para existir"(LAUTMAN, 1977, p.48).

Isto porque o problema participa de uma dialética ideal, que é superior à matemática. Não se trata, porém, de um domínio que tenha com a matemática uma relação exterior, o que vem a ser garantido por uma propriedade ainda mais importante desta dialética: a impossibilidade de ser pensada fora do problema, ou da teoria matemática, que ela engendra.

Uma equação diferencial seria, mais precisamente, a expressão de um problema em um campo simbólico. Quando o problema dialético se efetua em uma teoria, ele é inseparável de suas condições, aquelas que fazem com que o problema seja bem posto e que constituem a condição de possibilidade das soluções.

Voltaremos a falar da noção de problema na conclusão, aproximando-a da filosofia de Leibniz. Resumimos, por enquanto, o que dissemos acima, afirmando que há três níveis, que se dobram cada um sobre o que lhe vem a seguir:

O problema dialético, que é de natureza distinta do problema matemático, mas que é impossível de ser pensado fora do problema matemático que ele engendra— *transcendência do problema como categoria ideal, que é, ao mesmo tempo, imanente a uma teoria matemática efetiva.*

O problema matemático, que reúne o problema dialético e suas condições, sendo expresso em um campo simbólico que traz em si um princípio de solução— *transcendência do problema face à sua solução, por sua participação no problema dialético, e imanência nesta solução, por conter em sua formulação um princípio de solução*[18].

A solução propriamente dita.

[18]É neste sentido que podemos dizer que "um problema bem posto é um problema resolvido".

Parte II

UM PROBLEMA FÍSICO MATEMÁTICO: A ESTABILIDADE

Capítulo 6

Estabilidade: Condição de possibilidade da matematização do sistema do mundo

Desde a obra fundadora de Isaac Newton, o problema da estabilidade tem sido uma preocupação fundamental na descrição dos fenômenos evolutivos da natureza. Começaremos por comentar brevemente o aparecimento deste problema nos *Principia* de Newton, limitando-nos à discussão sobre a estabilidade do sistema do mundo, para falar em seguida das matematizações dos problemas da mecânica celeste propostas durante o século XVIII.

6.1 Ontologia e matematização da lei de atração universal

6.1.1 O apelo à intervenção divina para garantir a estabilidade do sistema do mundo

"De mais a mais, denomino as atrações e os impulsos, no mesmo sentido, aceleradores e motrizes. Uso, porém, indiferente e promiscuamente as palavras *atração*, *impulso* ou *propensão* de qualquer espécie em direção ao centro, considerando essas forças não fisicamente, mas só matematicamente. Por isso, precavenha-se o leitor de pensar que eu queira definir com essas palavras uma espécie ou modo de ação, causa ou razão física, atribuindo aos centros (que são pontos matemáticos) forças verdadeiras e físicas, quando digo, por acaso, que os centros atraem ou falo de forças do centro".

(Definição VIII, *Principia*(NEWTON, 1987, p.155 e 156))

"Até aqui explicamos os fenômenos dos céus e de nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa desse poder. É certo que ele deve provir de uma causa que penetra nos centros exatos do Sol e planetas, sem sofrer a menor diminuição de sua força; que opera não de acordo com a quantidade das superfícies das partículas sobre as quais ela age (como as causas mecânicas costumam fazer), mas de acordo com a quantidade da matéria sólida que elas contêm, e propaga sua virtude para todos os lados a imensas distâncias, decrescendo sempre com o inverso do quadrado da distância".

(Escólio Geral, *Principia*(NEWTON, 1987, p.170))

As duas citações acima foram tiradas da principal obra de Isaac Newton e são mencionadas pontualmente em nossa tese, tendo em vista uma breve discussão da controvérsia sobre a ontologia da lei de atração universal, problema que se relaciona à natureza e à causa desta lei.

Sobre a sua natureza, é necessário saber se se trata de uma lei puramente física. Este é o conteúdo das críticas que Leibniz fez a Newton. Para o primeiro, uma força física deve ser mecânica e a atração, entendida como ação à distância, não sendo mecânica, pode ser considerada apenas um milagre perpétuo. Para que a atração pudesse ser concebida como uma força, seria necessário identificar os traços manifestos do sistema do mundo que a exprimem. Assim, por exemplo, se afirmamos que um planeta gira em torno do Sol graças a uma certa força, precisamos mostrar como o Sol se liga a esse planeta ou dotá-lo de asas ou de um motor. As citações acima do texto de Newton revelam como ele próprio hesitava sobre a resposta a esta questão. Se por um lado, pela via da abstração matemática, a primeira afirmação não distingue a impulsão— que é uma força mecânica— e a atração; a segunda citação, por outro lado, ressalta a diferença de natureza física entre a atração e as forças mecânicas, observando ainda que a primeira tem o poder de agir a imensas distâncias.

A observação de Leibniz participava de críticas ainda mais profundas, que acusavam Newton de querer reintroduzir na física as qualidades ocultas dos escolásticos. Tais qualidades ocultas são propriedades inexplicáveis dos corpos que funcionam como causa de fenômenos observáveis. Sendo incapaz de explicar a causa da atração entre os corpos, a teoria de Newton proporia, segundo Leibniz, que tais corpos possuiriam a propriedade milagrosa de atrair outros corpos à distância. Como resposta às críticas de Leibniz, Newton acrescenta posteriormente o seguinte comentário:

"Mas até aqui não fui capaz de descobrir a causa dessas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não construo nenhuma hipótese; pois tudo que não é deduzido dos fenômenos deve ser chamado uma hipótese; e as hipóteses, quer metafísicas ou físicas, quer de qualidades ocultas ou mecânicas, não têm lugar na filosofia experimental. Nessa filosofia as proposições particulares são inferidas dos fenômenos, e depois tornadas gerais pela indução. Assim foi que a impenetrabilidade, a mobilidade e a força impulsiva dos corpos, e as leis dos movimentos e da gravitação foram descobertas. E para nós é suficiente que a gravidade realmente exista, aja de acordo com as leis que explicamos e que sirva abundantemente para considerar todos os movimentos dos corpos celestiais e de nosso mar"[1].

(Escólio Geral, *Principia*(NEWTON, 1987, p.170))

Para se livrar do problema colocado por Leibniz, Newton propõe finalmente que não vale a pena pesquisar a causa da gravitação se os próprios fenômenos garantem a sua eficácia. Esta resposta exclui, ao mesmo tempo, as questões sobre a causa e a natureza física da atração, eliminando esses problemas das preocupações da filosofia experimental. Esta filosofia trata somente das propriedades manifestas, sendo as qualidades físicas das forças e suas formas de ação negligenciadas em favor de quantidades e proporções matemáticas.

Todavia, em outras partes de sua obra, Newton reafirma, ele mesmo, seu interesse tanto pela natureza física, quanto pela causa da atração. A atração estaria colada aos corpos quando considerada como uma qualidade primária destes, ao lado da impenetrabilidade e da extensão. No que diz respeito à causa da atração, vimos Newton dizer que ela deve penetrar os centros dos corpos; e no livro Ótica este argumento será levado ainda mais longe, quando ele propõe que a atração se deve à presença de um certo meio.

[1] A tradução "não construo nenhuma hipótese" refere-se à famosa declaração, escrita originalmente em latim, "*hypotesis non fingo*". *Fingere* em latim é fingir ou inventar. Em português poderíamos traduzir literalmente o enunciado de Newton como "hipóteses não finjo" mas acreditamos que o mais adaptado seria "não invento nenhuma hipótese".

Na verdade, a posição de Newton não deixa de oscilar entre a afirmação da lei de atração como princípio fundamental da filosofia experimental, que só diz respeito aos fenômenos, e a procura de sua natureza física ou causa teológica. Uma análise da ambigüidade desta posição de Newton foi realizada minuciosamente por Alexandre Koyré em seus estudos sobre Newton(KOYRÉ, 1965c). Nesta obra, o autor lamenta que, a partir do século dezoito, a lei de atração universal tenha sido concebida como um fato científico independente de sua natureza e as questões que mesmo Newton gostaria de ter respondido tenham sido deixadas de lado pelos fundadores do positivismo na ciência:

"O pensamento do século XVIII se reconcilia com o inexplicável"(KOYRÉ, 1965b, p.163).

Ao invés de responder às questões relativas à ontologia da atração, fundou-se uma nova ciência onde tais questões não mais interessam. Neste comentário, o nosso objetivo não é, em absoluto, identificar as origens da matematização da física, mas procurar as motivações da exclusão da filosofia.

Foi o método da filosofia experimental que marcou os sucessores de Newton, que se interessaram, então, pelas leis que podem ser supostamente deduzidas, ou, mais precisamente, inferidas diretamente dos fenômenos e verificadas experimentalmente. Estas leis tornam-se as próprias causas e podem ser generalizadas para serem aplicadas a outros fenômenos, sendo esta extrapolação possibilitada pela matematização. Deste ponto de vista, a gravidade é uma força matemática da qual apenas os aspectos manifestos se tornam interessantes; não devendo o filósofo da natureza levar em conta quer o seu sentido físico, quer as suas causas. Desse momento em diante, esta filosofia deverá proceder somente por indução, que faz derivar as leis gerais da natureza dos fenômenos observáveis: a física passa a ser matematizada.

Para se estudar os fenômenos evolutivos da natureza, partindo de certos atributos mensuráveis da realidade física, é preciso encontrar a lei de evolução que descreve os estados subseqüentes do sistema a partir de certos valores dessas grandezas. Se esta lei de evolução é bem definida, o sistema é dito causal.

Partindo da hipótese fundamental da continuidade do tempo e do espaço, se as taxas de variação das variáveis do sistema dependem exclusivamente dos estados iniciais destas mesmas variáveis, a dependência pode ser matematicamente expressa por uma equação diferencial[2]. No contexto da física matemática, para se conhecer os estados sucessivos de um sistema causal deve-se encontrar as soluções da equação diferencial que o descreve.

Com o objetivo de descrever esta evolução, temos dois problemas fundamentais: determinar a lei de evolução e, uma vez estabelecida, resolvê-la. Encontrar uma nova lei de evolução é uma tarefa absolutamente não trivial e costuma representar uma revolução científica. No entanto, resolver uma equação diferencial é uma atividade quotidiana da física matemática, embora essa resolução possa ser bastante complicada.

O teorema de existência e unicidade para as soluções de uma equação diferencial, citado muitas vezes na primeira parte desta tese, garante que uma equação diferencial pode ser resolvida sempre que venha a satisfazer certas condições. As equações diferenciais são ferramentas fundamentais na descrição newtoniana do mundo e o seu postulado subjacente de causalidade. Neste contexto, o teorema de existência e unicidade seria o equivalente do postulado do determinismo, enunciado anteriormente por Laplace. Esta conclusão, muito propalada quando se fala das equações diferenciais, parece-nos, contudo, um pouco apressada e, em nossas conclusões, voltaremos a insistir sobre isto.

Se, para cada condição inicial, passa apenas uma solução da equação, os estados sucessivos do sistema são completamente determinados pelo seu estado inicial. Isto implica que as únicas variações possíveis seriam a definição da própria lei e a condição inicial, a primeira de caráter cognitivo e a segunda, uma escolha da própria natureza. Devemos perguntar então, no caso da mecânica celeste, como foi determinada a configuração inicial dos corpos celestes?

"Os seis planetas primários são revolucionados em torno do Sol em círculos concêntricos ao sol, com movimentos dirigidos em direção às mesmas partes e quase no mesmo plano. Dez luas são revolucionadas em torno da Terra, Júpiter e Saturno, em círculos concêntricos a eles, com a mesma direção de movimento e quase nos planos

[2]Observamos que, no problema matemático, tal continuidade é uma hipótese fundamental, e faz parte do âmbito do problema.

das órbitas desses planetas; mas não se deve conceber que simples causas mecânicas poderiam dar origem a tantos movimentos regulares, desde que os cometas erram por todas as partes dos céus em órbitas bastante excêntricas; pois por essa espécie de movimento eles passam facilmente pelas órbitas dos planetas e com grande rapidez; e em seus apogeus, onde eles se movem com o mínimo de velocidade e são detidos o máximo de tempo, eles recuam às distâncias máximas entre si e sofrem, portanto, a perturbação mínima de suas atrações mútuas. Este magnífico sistema do Sol, planetas e cometas poderia somente proceder do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso".

(Escólio Geral, *Principia*(NEWTON, 1987, p.167-168))

Na visão de Newton, a lei de atração, apenas, não é suficiente para explicar a impressionante regularidade do sistema solar: foi preciso um Deus para determinar sua configuração inicial, a partir da qual aplicar a lei. Além disso, o Deus Todo-poderoso, que criou o Universo e introduziu a atração entre os corpos, será Ele mesmo a garantir sua estabilidade. A atração mútua poderia perturbar a regularidade divina do universo e o próprio Deus deve intervir regularmente para garantir a permanência de sua criação.

"Um destino cego não poderia mover assim todos os planetas, salvo algumas irregularidades quase imperceptíveis, que podem provir da ação mútua entre os planetas e os cometas e que, provavelmente, se tornarão maiores para um tempo longo, até que enfim este sistema precise de ser recolocado em ordem pelo seu Autor".

Contra esta necessidade da intervenção de um Deus que salvaguarde a estabilidade do sistema solar se dirigem, mais uma vez, as críticas de Leibniz. Leibniz não admite a possibilidade de um Deus que produza leis como milagres, sem que estas leis tenham uma contrapartida na própria natureza das coisas criadas e que, ainda por cima, funcione como um relojoeiro que deve recolocar regularmente a máquina em funcionamento.

Esquecendo as questões sobre a causa e a natureza da atração, o século XVIII começa com uma lei geral, que explica igualmente os fenômenos celestes e os terrestres, porque andamos com os pés sobre a Terra e porque observamos o movimento dos astros, a forma da Terra e o refluxo dos mares. Para finalizar a construção da nova ciência é preciso ainda eliminar a única explicação não puramente empírico-teórica do sistema do mundo: Deus como garantia da estabilidade. Para tanto, resta demonstrar a auto-suficiência da lei de atração universal e demonstrar a estabilidade como conseqüência desta lei, a partir do método newtoniano da indução. Tal será a motivação confessa do trabalho de Laplace sobre a mecânica celeste, como comentaremos mais adiante.

6.1.2 A análise matemática em prol da autosuficiência do sistema newtoniano: contra a intervenção divina

Reconhecendo a importância do método de indução e da lei de atração universal, Laplace lamenta que Newton não tenha sabido atribuir a eles todo o poder de que dispõem. Para devolver ao sistema newtoniano toda a sua força, seria necessário traduzí-lo usando as ferramentas da análise matemática. Segundo Laplace, a limitação de Newton se deve a duas restrições principais: a primeira, de ordem prática, as limitações da análise de seu tempo, e a segunda, metafísica, o recurso à explicação divina para dar conta da estabilidade do sistema do mundo. Para que a ciência newtoniana ressurja em todo o seu resplendor, ambas as restrições devem ser eliminadas.

Segundo Laplace, o fato de se terem generalizado e retificado as demonstrações de Newton, encontrando-se um acordo entre as observações e os resultados da análise matemática, põe fim à discussão sobre o princípio de atração universal como qualidade oculta. Laplace retoma o método newtoniano, que consiste em formular uma lei a partir da observação e em generalisá-la para que ela seja aplicada a outros fenômenos, reinterpretando-o com as novas ferramentas da análise:

"*Cette liaison analytique des faits particuliers avec un fait général est ce qui constitue une théorie*"(LAPLACE, 1796, p.436).

Para expor seu sistema do mundo, Newton havia utilizado o método sintético da geometria e para Laplace foi exatamente esta preferência que o impediu de avançar. Segundo Laplace, a aplicação da análise ao princípio de atração teria sido o fator fundamental para o desenvolvimento da astronomia no século dezoito:

" *La synthèse géométrique a (...) la propriété de ne faire jamais perdre de vue son objet, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences; au lieu que l'analyse algébrique nous fait bientôt oublier l'objet* *principal pour nous occuper de combinaisons abstraites...l'inestimable avantage de transformer le raisonnement en procédés mécaniques, a des résultats souvent inaccessibles à synthése. Telle est la fécondité de l'analyse, qu'il suffit de traduire dans cette langue universelle les vérités particulières, pour voir sortir de leurs expressions une foule de vérités nouvelles et inattendues. Aucune langue n'est autant susceptible de l'élégance"* (LAPLACE, 1796, p.437).

Se a física e a astronomia atingem um grau tão elevado de perfeição, isto se deve a:

"La puissance de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets qu'il est simple dans sa cause" (LAPLACE, 1796, p.440).

A observação permanece um fator importante, somente por fornecer os dados indispensáveis à confirmação das teorias analíticas. A teoria da Lua é um exemplo típico deste casamento entre análise e observação:

"Enfin, par une combinaison heureuse de l'analyse avec les observations, la Lune, qui semble avoir été donnée à la Terre, pour l'éclairer pendant les nuits, est encore devenue le guide le plus assuré du navigateur..."(LAPLACE, 1796, p.441).

No que diz respeito à estabilidade do sistema do mundo, foi mais uma vez a análise que trouxe uma nova luz sobre o problema. Privilegiamos o ponto de vista de Laplace nesta seção, visto que ele será um dos principais personagens da história a que nos dedicamos aqui, ou seja, a questão da estabilidade. Mas, se considerarmos a matematização da física newtoniana, não poderemos deixar de mencionar os trabalhos de Euler, Clairaut e d'Alembert, que foram os primeiros a aplicar a análise para estudar as perturbações sofridas pelos movimentos celestes, conseguindo explicar, pelo método de aproximação, vários fenômenos do sistema do mundo, utilizando para isso apenas a lei da atração universal. Falaremos um pouco destes trabalhos na próxima seção. Por enquanto, citemos pela última vez o ponto de vista de Laplace sobre a importância do problema da estabilidade, no que tange a validade das teorias newtonianas.

"Quoique les éléments du système des planétes soient arbitraires, cependant ils ont entre eux des rapports qui peuvent nous éclairer sur son origine. En le considérant

avec attention, on est étonné de voir toutes les planétes se mouvoir autour du Soleil, d'occident en orient, et presque dans un même plan; les satellites en mouvement autour de leurs planétes, dans le même sens et à peu prés dans le même plan que les planétes; enfin, le Soleil, les planétes et les satellites dont on a observé les mouvements de rotation, tourner sur eux-mêmes, dans le sens et à peu prés dans le plan de leurs mouvements de projection.

(...)

Des phénoménes aussi extraordinaires ne sont point dus à des causes irréguliéres. En soumettant au calcul leur probabilité, on trouve qu'il y a plus de deux cent mille milliards à parier contre un, qu'ils ne sont point l'effet du hasard(...).

Nous sommes encore forcés de reconnaître ici l'effet d'une cause réguliére(...).

Quelle est cette cause primitive?

Quelle que soit la cause véritable, il est certain que les éléments du systéme planétaire sont ordonnés de maniére qu'ils doivent jouir de la plus grande stabilité, si des causes étrangéres ne viennent point la troubler"(LAPLACE, 1796, p.448-449).

Sobre a questão da natureza da lei de atração, Laplace responde que, na natureza, apenas as relações se dão a conhecer, sob forma de razões matemáticas. Esta lei é uma prova disto, uma vez que ela age identicamente no nosso sistema do mundo como em um sistema de outras dimensões proporcionais às originais. A estabilidade é uma destas relações ("*rapports*").

Laplace não está mais interessado pela causa do advento do sistema solar, mas qualquer que seja esta causa, ela deve possuir a propriedade de estabilidade. A estabilidade torna-se um invariante das causas da natureza, cuja natureza não mais nos importa. Da investigação das causas passa-se à análise dos efeitos, que por si só, indicam a natureza da ordem que rege o sistema solar. Para demonstrar que não necessitamos mais de um ser exterior para recolocar em ordem o sistema do mundo, basta demonstrar que as leis de Newton são suficientes para explicar a estabilidade deste sistema, a começar pelo sistema solar.

6.2 Sobre a matematização do problema da estabilidade

6.2.1 Os analistas do século XVIII

Como estamos interessados predominantemente pela questão da estabilidade, faremos um comentário muito breve sobre a formulação analítica dos problemas da mecânica celeste que a antecederam. Para uma história detalhada das teorias matemáticas sobre a atração e a forma da Terra desde Newton até Laplace, indicamos a obra de Todhunter: *A History of the Mathematical Theories os Attraction and the Figure of Earth, from the Time of Newton to that of Laplace* (TODHUNTER, 1873).

Destacam-se, neste período, as obras de d'Alembert, Clairaut e Euler que se situam como sucessores de Newton e antecessores de Lagrange e Laplace. Podemos falar desta continuidade não somente quanto aos problemas físicos e matemáticos de que tratavam, mas também quanto ao modo como contribuíram, na ciência, para negligenciar as causas em favor dos efeitos das leis da natureza. No caso de d'Alembert, Paty (PATY, 1998a, p.90) ressalta que a sua dinâmica desconsiderava as forças, vistas como uma noção metafísica, para estudar os seus efeitos: as mudanças de quantidade de movimento. Mas esta motivação ultrapassa o domínio da física ou da matemática, ou melhor, como consta também da obra de Paty, é a ciência que sai de seu domínio próprio para participar do amplo movimento de idéias que justifica a denominação desta época como o "Século das Luzes". Não esqueçamos que d'Alembert foi editor da *Encyclopédie*, juntamente com Diderot, obra na qual o novo ponto de vista sobre a independência das leis científicas foi propagado.

A partir daqui, procuraremos explicar a forma como foram tratados alguns problemas específicos, em primeiro lugar o do movimentos dos planetas em torno do Sol. Na descrição kepleriana, a órbita de cada planeta em torno do Sol devia ser elíptica, visto que se considerava apenas a interação entre este planeta e o Sol. Mas, a partir da lei de atração universal, somos forçados a considerar a perturbação causada pela atração dos outros corpos celestes. Devemos a d'Alembert, Clairaut e Euler, não apenas a introdução dos métodos da análise na determinação dos movimentos dos corpos celestes, mas a preocupação com a perturbação que os outros elementos do sistema solar poderiam causar às órbitas.

Mas os astros não podiam ser considerados todos ao mesmo tempo, não sem comprometer a possibilidade de formulação do problema. Dada a quantidade de planetas e de elementos variáveis em suas órbitas, podemos imaginar a complicação analítica das equações que descreveriam o sistema solar. Uma primeira proposição, feita pelo próprio Newton[3], tratava do comportamento do sistema Terra-Sol levando em conta as perturbações ocasionadas pelo movimento da lua. Este problema ficou conhecido como *problema dos três corpos* e é o primeiro exemplo em que se considerou a questão da estabilidade. Mesmo que Laplace reconheça a importância da formulação proposta por Newton, ele observa que, pela falta de métodos analíticos, sua obra desconsiderava aspectos importantes.

Este passo foi dado por d'Alembert, Clairaut e Euler. Das equações diferenciais escritas apenas a partir da lei de atração tiravam-se as séries que descreviam os movimentos dos astros e a estas séries aplicavam-se os métodos de perturbação. No entanto, no período aqui mencionado, estudavam-se apenas as alterações dos movimentos elípticos dos planetas, restando ainda a verificação das variações dos elementos que determinavam as órbitas elípticas em si mesmas. Mesmo que o problema relativo a certos termos inconvenientes, que aparecem nestas séries, tenha sido assinalado por estes cientistas, trata-se apenas dos primórdios do problema da estabilidade que ganhará uma nova interpretação com os trabalhos de Lagrange e Laplace, de cujas obras falaremos na seção seguinte.

Quanto ao sistema do mundo unificado, descrito por leis autônomas, dele participam igualmente os fenômenos celestes e os terrestres. É assim que as mesmas leis podem explicar tanto as órbitas dos planetas quanto o movimento das marés. A análise incide ao mesmo tempo, e da mesma forma, na explicação de outros fenômenos que fazem parte da ordem do universo, como o problema relativo à forma da Terra.

Newton já havia proposto[4] que a Terra deve possuir a forma de um esfera achatada nos pólos, devido à força centrífuga associada a seu movimento de rotação. Segundo esta teoria, a Terra teria adquirido a forma atual a partir de um fluido quente em rotação, que teria se resfriado, solidificando-se no exterior e contraindo-se. Newton propõe que esta figura seja um elipsóide de revolução, chegando mesmo a calcular

[3]Proposição 66 do livro I dos *Principia*.
[4]Proposições 18 e 19 do livro III.

a sua excentricidade. Contudo, para que tal figura pudesse constituir um modelo aceitável da forma da Terra, era preciso demonstrar que este elipsóide estava em equilíbrio. Este resultado, para taxas de rotação pequenas, foi encontrado por Mac Laurin em 1740 (MAC LAURIN, 1740)[5].

A partir desta descoberta, tornou-se interessante estudar as propriedades dos elipsóides de Mac Laurin, como estas figuras ficaram conhecidas. Uma das questões era, por exemplo, a de saber quantos elipsóides de Mac Laurin poderiam existir para valores dados da velocidade angular e da massa do fluido. D'Alembert havia atacado este problema, concluindo que, para uma velocidade menor que certo valor L, teríamos exatamente dois elipsóides de Mac Laurin. Estas duas figuras viriam a coincidir quando a velocidade fosse igual a L e, se ela ultrapassasse este valor, não haveria nenhum elipsóide satisfazendo as condições iniciais dadas.

É neste contexto, sob a pluma de d'Alembert, que encontramos a primeira discussão explícita sobre um problema de estabilidade: a questão da estabilidade da forma da Terra[6]. No primeiro tomo de seus *Opuscules mathématiques* (D'ALEMBERT, 1773, p.246), publicado em 1761, d'Alembert lembra que não é necessário apelarmos para um núcleo interior alongado para explicar o fato da Terra ser um esferóide alongado. Contudo, "*un certain Géomètre Italien qui a du nom dans les Mathématiques*" atacou esta constatação. Trata-se de Boscovich, que considerou que se o núcleo interior não fosse alongado, mas achatado; e se perturbássemos o fluido exterior de seu estado de equilíbrio, ele nunca mais retornaria a este estado. Este acontecimento só teria lugar se o núcleo interior fosse alongado e esta hipótese tornaria o equilíbrio razoável.

A esta crítica, que fala da importância de se considerar a estabilidade do estado de equilíbrio, d'Alembert responde:

"Eu poderia responder, em primeiro lugar, que em todas as pesquisas feitas até aqui sobre a figura da Terra, a questão foi apenas a do estado de equilíbrio; e que até este geômetra, não se tinha ainda pensado em adicionar esta condição, que o fluido perturbado deste estado se restabeleça por si mesmo. Assim, partindo da maneira

[5]Há outros nomes importante relacionados ao problema, como Huygens e Maupertuis.

[6]Uma breve menção a esta questão pode ser encontrada no livro de Todhunter(TODHUNTER, 1873, p.366).

ordinária de considerar esta questão, eu não devia, ou ao menos não era obrigado a introduzir esta nova consideração no meu cálculo. Contudo, a exemplo do geômetra de quem acabo de falar, vou levá-la em consideração"[7].

Demonstrou então, sem empregar esta nomenclatura, que não é necessário que o núcleo interior seja alongado para haver estabilidade. Para que o fluido retorne a sua posição inicial, quando de uma perturbação, é suficiente considerar a direção da força que deve remetê-lo a esta posição, qualquer que seja a forma inicial deste fluido. Não é necessário considerar a forma do núcleo interior, mas torna-se indispensável que a densidade do fluido esteja em uma certa relação com a do núcleo[8].

A tradução para o francês do livro de Boscovich, *Sur la Figure de la Terre*, recolocou a querela na ordem do dia. Para responder às acusações feitas pelo tradutor, d'Alembert retomou o tema nas notas do tomo VI do mesmo *Opuscules mathématiques*, para afirmar que, em seu artigo anterior que acabava de ser comentado pelo tradutor, "o equilíbrio não era somente *real*, mas ainda, como se exprimem os geômetras, um equilíbrio *firme*"[9]. Desse modo, ele introduz pela primeira vez a palavra *firme* ("*ferme*") para designar a propriedade que hoje chamamos de *estabilidade*.

No entanto, ao considerar as críticas que teriam sido feitas contra ele em favor de um resultado de Clairaut, vemos que d'Alembert não atribuía grande importância à exigência de estabilidade:

"Sobre o que eu observaria de início que, em toda a obra de Clairaut, não era questão examinar os casos em que o equilíbrio era ou não firme, não tendo este douto geômetra mencionado esta condição em lugar nenhum (...). Depois, pretendeu-se que esta condição sobre a firmeza do equilíbrio era necessária, fisicamente falando (...), mas é certo, pelo menos, que ela não é matematicamente indispensável (...),

[7] "*Je pourrais d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici sur la Figure de la Terre, il n'a jamais été question que de l'état d'équilibre ; et que jusqu'à ce Géomètre, on n'avait point encore pensé à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état, se rétablît de lui-même. Ainsi, en partant de la manière ordinaire d'envisager cette question, je ne devais point, ou du moins je n'étais pas obligé à faire entrer cette considération nouvelle dans mon calcul. Cependant, à l'exemple du Géomètre dont je viens de parler, je vais y avoir égard*"

[8] Esta condição foi demonstrada ser falsa por Laplace, que introduziu uma nova abordagem para tratar este problema.

[9] "*L'équilibre était non seulement réel, mais encore, comme s'expriment les Géomètres, un équilibre ferme*".

só se tratava, entre mim e M.Clairaut, do caso de um equilíbrio matematicamente possível"[10].

O mais interessante desta citação é a diferença, admitida por d'Alembert, entre uma situação "fisicamente necessária" e "matematicamente indispensável". A questão matemática termina com a demonstração da possibilidade do equilíbrio, sendo a estabilidade uma exigência de ordem física. Não sabemos se esta afirmacão se deve à legitimidade da questão da estabilidade como um problema matemático ou ao fato de que não estão claras as condições para que este problema possa ser tratado matematicamente.

Mas, voltando ao sexto livro de seus *Opuscules mathématiques*, d'Alembert parece ter mudado um pouco de ponto de vista em relação ao primeiro trecho citado. Se no livro I ele parece não dar muito valor a questão da estabilidade, chegando a afirmar que esta pergunta partiu do "geômetra italiano", ele afirmará agora que "há muito tempo, ainda que o tradutor pareça adiantar o contrário, os geômetras distinguiram, em geral, nos corpos dois estados de equilíbrio, um *firme*, e outro não"[11]. Sobre esta tradição, d'Alembert menciona um artigo de Daniel Bernoulli, de 1747, sobre o equilíbrio dos corpos flutuantes, onde a questão da 'firmeza" se revelaria mais necessária do que no estudo da figura da Terra[12].

6.2.2 A estabilidade contra o furor dos fluxos: a forma da Terra e o refluxo dos mares

Desde que as causas físicas e metafísicas foram excluídas e as leis tornaram-se, elas mesmas, as causas dos fenômenos, revelou-se premente investigar todos os fenômenos que fazem parte da ordem do universo segundo estas mesmas leis. Assim, é entre as leis do movimento que devemos procurar as causas dos fenômenos que participam do

[10] "*Sur quoi je remarquerai d'abord que dans tout l'ouvrage de M. Clairaut, il n'était pas question d'examiner les cas dans lesquels l'équilibre était ferme ou ne l'était pas, ce savant Géomètre n'ayant fait mention de cette condition en aucun endroit (...). On a prétendu depuis que cette condition de la fermeté de l'équilibre était nécessaire ; je n'examine pas en ce moment si cette condition doit être regardée comme nécessaire, physiquement parlant (...), mais il est du moins certain qu'elle n'est pas mathématiquement indispensable (...), il ne s'agissait entre M. Clairaut et moi que du cas d'un équilibre mathématiquement possible*".

[11] "*Il y a longtemps, quoique le Traducteur semble avancer le contraire, que les géomètres ont distingué en général dans le corps deux états d'équilibre, l'un ferme, l'autre qui ne l'est pas*".

[12] Cremos ser este artigo "*Commentationes de Statu Aequilibri corporum humido insidentium*", publicado nas Antigas memórias de São Petesburgo(BERNOULLI, 1747(1738))

sistema do mundo:

"*Déjà quelques-uns d'eux ont été ramenés à ces lois. Ainsi la stabilité de la terre à sa surface, et celle de l'équilibre des mers, l'une et l'autre si nécessaires à la conservation des êtres organisés, ne sont qu'un simple résultat du mouvement de rotation et de la pesanteur universelle. Par sa rotation, la terre a été aplatie (...). En vertu de la pesanteur, les couches terrestres les plus denses se sont rapprochées du centre de la terre, dont la moyenne densité surpasse ainsi celle des eaux qui la recouvrent ; ce qui suffit pour assurer la stabilité de l'équilibre des mers, et pour mettre un frein à la fureur des flots*"(LAPLACE, 1796, pp.451-452).

Quanto à forma da Terra, será preciso esperar até 1776 para que Laplace corrija o erro cometido por d'Alembert(LAPLACE, 1775-1778). O raciocínio deste, supunha implicitamente que a perturbação do fluido conservaria a sua forma elipsoidal, o que só acontece em um caso muito particular. Para resolver a questão da estabilidade do equilíbrio, é preciso considerar que o fluido pode ser perturbado do estado de equilíbrio de um modo arbitrário, o que pode ser feito de infinitas maneiras:

"Parece mesmo extremamente verossímil que, quaisquer hipóteses que se faça sobre a profundidade e sobre a densidade do fluido, há sempre uma infinidade de maneiras de agitá-lo infinitamente pouco, nas quais ele irá cessar de fazer oscilações infinitamente pequenas; (...) pode-se mesmo dizer geralmente que, nesta pesquisa, a consideração da estabilidade do equilíbrio é inútil, uma vez que não há verdadeiramente equilíbrio firme absoluto e que a estabilidade é sempre relativa à natureza da agitação primitiva"[13].

Neste trecho, Laplace já emprega a denominação "estabilidade" como sinônimo de "firmeza" do estado de equilíbrio, mesmo que de modo excessivamente pessimista quanto ao futuro do problema da estabilidade deste equilíbrio. Será o próprio Laplace, mais tarde, que irá propor uma solução a partir de outro ponto de vista.

Em 1782, retomando a questão com instrumentos analíticos mais potentes, ele resolve o problema da estabilidade do equilíbrio dos mares, mostrando que a condição

[13]"*Il paraît même extrêmement vraisemblable que, quelques hypothèses que l'on fasse sur la profondeur et sur la densité du fluide, il y a toujours une infinité de manières de l'ébranler infiniment peu, dans lesquelles il cessera de faire des oscillations infiniment petites ; (...) on peut même dire généralement que, dans cette recherche, la considération de la stabilité de l'équilibre est inutile, puisqu'il n'y a point vraisemblablement d'équilibre ferme absolu et que la stabilité est toujours relative à la nature de l'ébranlement primitif*".

necessária e suficiente para que esta estabilidade se dê, é que a densidade média da Terra ultrapasse a do mar. Todavia, estes resultados supõem que a forma da Terra seja quase esférica, podendo-se formular uma pergunta equivalente sobre os elipsóides de equilíbrio de uma massa líquida, que podem ser elipsóides de revolução ou com os três eixos desiguais.

Um fato importante no desenvolvimento do problema da forma da Terra deu-se em 1834, quando Jacobi(JACOBI, 1834) anunciou à *Académie de Paris* que ele havia encontrado uma família de elipsóides de equilíbrio, possuindo os três eixos desiguais, que não eram elipsóides de revolução como os de Mac Laurin. Este resultado foi um choque para os cientistas do início do século XIX, que estavam convencidos de que a figura de equilíbrio de um fluido em rotação devia possuir obrigatoriamente uma simetria por rotação, como Lagrange havia "demonstrado" em seu livro sobre a mecânica analítica.

Esta descoberta, bem como certas provocações de Jacobi contra Laplace[14], motivaram Liouville a atacar o problema. Em 1842, Liouville apresenta uma comunicação à *Académie* intitulada *Sur la stabilité de l'équilibre des mers*. Nesta comunicação, menciona várias vezes o trabalho de Laplace, salientando que seu objetivo inicial era apenas simplificar "os cálculos bastante longos da mecânica celeste".

Dos trabalhos de Liouville sobre este problema, vários não foram publicados. Deles tomamos conhecimento graças ao artigo de J. Lützen *Joseph Liouville's Work on the Figures of Equilibrium of a Rotating Mass of Fluid*. Em sua análise da obra de Liouville, Lützen, também autor de sua biografia, comenta que os trabalhos sobre a estabilidade do equilíbrio constituem a parte mais interessante das contribuições deste pesquisador do século XIX ao problema da figura de equilíbrio de um fluido. Em um artigo chamado *Recherches sur la stabilité de l'équilibre des fluides*, publicado em 1843, Liouville coloca uma questão muito importante quanto ao valor epistemológico da estabilidade, que doravante passaremos a comentar.

Laplace demonstrara que, para uma massa dada e um momento de rotação que se imprime a esta massa, existe apenas um elipsóide de Mac Laurin. Mas era evidente

[14] Ver (LUTZEN, 1984).

que Laplace não conhecia a descoberta de Jacobi. Liouville observa que o tom imprimido por Laplace ao seu trabalho "parecia indicar ao mesmo tempo que esta figura final é única, e livrar o espírito das soluções múltiplas". Entretanto, os elipsóides de Jacobi vêm destruir esta elegância. Isto porque passamos a ter duas respostas possíveis para o problema e não sabemos qual delas escolher.

É justamente a condição de estabilidade que irá fornecer a resposta. Liouville analisa o caso complementar àquele que havia sido considerado por Laplace, isto é, quando a forma do fluido não é quase esférica. Mas Liouville mostra ainda que existe apenas um elipsóide estável para cada momento angular que, para certos valores, serão os elipsóides de Mac Laurin e, para outros, os elipsóides de Jacobi.

Lagrange acreditava, e esta era uma questão fundamental, que havia apenas um elipsóide para cada valor do momento angular, o que Jacobi demonstra ser falso. O resultado de Liouville vem restabelecer a unicidade, ao acrescentar que os elipsóides são estáveis[15]. Reencontramos assim, para as figuras estáveis, a elegância da teoria anterior sobre a unicidade das figuras de equilíbrio, que a descoberta de Jacobi havia destruído. Liouville observa que não se pode jamais abstrair desta propriedade nos estudos das questões físico-matemáticas. Ponto de vista este bem distinto daquele que fora defendido por d'Alembert: a estabilidade é matematicamente indispensável ao problema da figura da Terra.

Como a maior parte destes trabalhos de Liouville não foram publicados em sua época, não podemos falar de uma influência sobre seus contemporâneos. Podemos sim, encontrar algumas ressonâncias entre eles e os trabalhos de Poincaré sobre a estabilidade do equilíbrio de um fluido em rotação, mesmo que Poincaré não tenha tido sequer conhecimento desta parte da obra de Liouville. Como conjectura Lützen, talvez isto se deva ao fato dos dois intelectuais franceses terem sido influenciados por suas leituras de Laplace, levando-nos a observar que, para o autor do livro *Exposition sur le système du monde*, a questão da estabilidade deve ser uma preocupação incontornável na matematização do sistema do mundo. Na verdade, o único matemático que menciona estes trabalhos de Liouville é Lyapunov, mas falaremos de Poincaré e Lyapunov apenas no próximo capítulo, debruçando-nos agora sobre os

[15]Mais tarde, este resultado será demonstrado verdadeiro apenas para valores do momento inferiores a um certo valor.

contemporâneos de Liouville.

Riemann foi, um pouco depois de Liouville, um dos matemáticos importantes a trabalhar sobre a estabilidade das figuras de equilíbrio, seguindo a influência de seu mestre Lejeune-Dirichlet. Não nos aprofundaremos sobre esses trabalhos, que, na verdade, se inserem na verdade em um contexto um pouco mais amplo que o da estabilidade. Retornemos um momento sobre um resultado específico de Dirichlet que é significativo para o problema que tratamos aqui.

Para um sistema de pontos materiais, isto é, em um exemplo bem mais simples que o dos fluidos, a concepção clássica sobre a estabilidade do equilíbrio, adotada por Lagrange, era a de que um sistema é estável quando a função potencial atinge seu valor extremo. A demonstração deste teorema de Lagrange, proposta por Lejeune-Dirichlet(LEJEUNE-DIRICHLET, n.d.), é considerada um dos raros exemplos de trabalho antecessor do ponto de vista qualitativo[16]. Pela sua importância, descrevemo-la em seguida:

Admitamos que a posição de equilíbrio do sistema esteja na origem do sistema de coordenadas e que, neste ponto, a função potencial, que chamaremos de ϕ, atinge seu máximo. Sejam $\lambda, \mu, \nu ...$ as variáveis do sistema. Dirichlet observa que:

"*La démonstration donnée par Lagrange se ramène à ceci : le développement de la fonction suivant les puissances de $\lambda, \mu, \nu, ...$ qui commence par les termes du second ordre, est réduit à ces termes; puis, d'après la condition connue du maximum, que les termes du second ordre peuvent être considérés comme une somme de carrés négatifs, on déduit, pour $\lambda, \mu, \nu, ...$ des limites que ces quantités ne peuvent pas franchir*".

Ao final, ele acrescenta que falta rigor a esta demonstração. Para negligenciar os termos de ordem superior, é preciso assegurar que as grandezas são pequenas e que elas permanecem confinadas entre limites também pequenos, mesmo depois de transcorrido um grande período de tempo. No entanto, podemos obter um máximo se os termos de segunda ordem se anularem; seria preciso, portanto, encontrar uma fórmula para estes termos de segunda ordem, como a fórmula da soma dos quadrados negativos que empregamos para os termos de primeira ordem.

Mas Dirichlet não segue esta via, que ele mesmo observa ser necessária, preferindo

[16]No próximo capítulo, veremos um outro antecessor de Poincaré, Hill, que, diferentemente de Dirichlet, exerceu influência direta sobre o matemático francês que enfocamos em nossa tese.

um outro método:

"*Heureusement, on peut démontrer le principe de la stabilité de l'équilibre indépendamment de ces formules, par une considération très simple qui se rattache d'une manière immédiate à l'idée du maximum*".

Ressaltamos que esta fórmula, como também aquela que era usada por Lagrange, estabelece uma igualdade, para chegar a uma conclusão que é, na verdade, uma desigualdade. O que se liga diretamente à idéia de máximo, bem como à noção de estabilidade, é o uso de desigualdades. E este será efetivamente o raciocínio empregado por Dirichlet.

Começa-se por encontrar uma região onde a função ϕ é negativa, seu menor valor sendo $-p$. Se tomamos valores iniciais λ_0, μ_0, ν_0 nesta região, tal que

$$\phi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, ...) - \sum mv_0^2 > -p$$

permaneceremos nesta mesma região durante toda a duração do movimento. A demonstração de Dirichlet emprega então a continuidade dos movimentos para mostrar que, se eles saíssem da região considerada, haveria um momento em que apenas alguns destes movimentos estariam na fronteira, fazendo com que a força viva fosse negativa, gerando a contradição necessária.

Finda a demonstração de Dirichlet, que dá as condições para o equilíbrio estável de um sistema de pontos materiais, voltemos a considerar o problema da estabilidade do equilíbrio de um fluido. No próximo capítulo, citaremos algumas influências diretas do método de Dirichlet para o tratamento deste problema, o que terá lugar um pouco mais tarde. Passemos, neste momento, aos trabalhos dos ingleses.

Ignorava-se a existência de outras formas de equilíbrio não elipsoidais até a publicação dos trabalhos de Mathiessen e William Thomson (Lord Kelvin). Este último nos interessará particularmente pelo tratamento que ele dá ao problema da estabilidade. Dois tipos de estabilidade são então definidos: a estabilidade secular, quando levamos em conta a viscosidade, e a estabilidade ordinária, quando desprezamos qualquer resistência.

Os resultados dos ingleses neste assunto tornaram-se conhecidos com a publicação do livro *Treatise on Natural Philosophy* de Thomson e Tait, especialmente por ocasião de sua segunda edição, entre 1879 e 1883 (THOMSON & TAIT, 1879-1883), em que é acrescentada a discussão da estabilidade. Os autores se baseavam no princípio de que, se o líquido é não viscoso e temos um valor extremo da energia total, o equilíbrio é estável. No entanto, as demonstrações apresentadas nesta obra são pouco rigorosas, sobretudo por fazerem uso de aproximações lineares não justificadas. Partirão deste ponto as pesquisas de Poincaré e Lyapunov que, como veremos no próximo capítulo, trouxeram uma nova luz sobre o problema.

6.2.3 As desigualdades seculares da mecânica celeste: Lagrange e Laplace

Voltando aos problemas relativos à estabilidade do movimento dos corpos celeste, começamos por observar que Lagrange foi o primeiro a apresentar uma nova formulação do problema dos três corpos, reduzindo consideravelmente o número de equações necessárias. No artigo "*Essai sur le problème des trois corps*", submetido ao prêmio da *Académie de Sciences* em 1772 (LAGRANGE, 1772), Lagrange propõe que, na descrição do movimento dos três corpos, não sejam consideradas as órbitas de todos os três corpos, mas somente as variações do triângulo formado pelas distâncias entre eles. Este procedimento permite reduzir as doze equações, que descreviam o movimento anteriormente a apenas sete. Contudo, este proeminente matemático do século XVIII, resolve, neste artigo, apenas o caso particular em que a razão das distâncias entre os corpos é constante.

Uma diferença fundamental entre o enfoque dado por Lagrange e Laplace e seus antecessores é que eles admitem que podemos perturbar, além da forma das elipses (como faziam os precursores), todos os elementos das órbitas tomadas como elípticas. No problema dos três corpos, ou mais geralmente, no problema geral dos n corpos, deve-se levar em conta todos os elementos de suas órbitas. Deixamos a Lagrange a tarefa de explicar em que consistem estes elementos:

"*On entend par éléments de l'orbite elliptique d'une planète la moitié du grand axe de l'ellipse, ou la distance moyenne de la planète au soleil; la position de ce grand axe sur le plan de l'orbite, ou le lieu des apsides; le rapport de la distance des deux foyers au grand axe, ou l'excentricité; l'angle que fait avec l'écliptique le plan de l'orbite, ou son inclinaison; et l'angle que fait avec une ligne fixe, donnée de position* *sur l'écliptique, l'intersection de ces deux plans, ou la position de la ligne des nœus. Ces cinq quantités déterminent complètement la grandeur et la position de l'ellipse; elles sont par conséquent différentes pour les diverses planètes ; mais elles demeurent les mêmes pour chaque planète en particulier, du moins tant qu'on fait abstraction des dérangements qu'elle peut éprouver de la part des autres planètes"*(LAGRANGE, 1781-1782).

Dada a solução da equação diferencial que rege os movimentos de todos os planetas, variamos, na equação de cada planeta, as constantes que se relacionam aos elementos de sua órbita. Pode-se dar conta, deste modo, da variação dos elementos da órbita de um planeta, quando da perturbação ocasionada por outros corpos celestes que, por sua vez, se movem igualmente em órbitas elípticas. Esta perturbações se exprimem por desigualdades que interferem na forma elíptica. Desigualdades que podem ser periódicas, o que significa que a posição inicial irá se restabelecer; ou seculares, as quais perturbam gradualmente os elementos das órbitas, acumulando-se com o passar dos séculos, acabando por modificar de modo considerável a posição inicial. Estabelecer limites para o comportamento das desigualdades seculares do movimentos dos corpos celestes era o problema identificado à estabilidade do sistema solar. Haja visto a complexidade do sistema tomado como um todo, este era dividido em vários sub-problemas interessantes por si mesmos, como por exemplo o problema da equação secular da Lua e o das desigualdades seculares de Júpiter e Saturno.

Em 1773, Lagrange se apresenta mais uma vez ao prêmio da *Académie des Sciences*, com o trabalho "*Sur l'équation séculaire de la Lune*"(LAGRANGE, 1773), onde afirma que a gravitação universal ainda não fornecera a explicação para a equação secular da Lua, como tinha sido o caso das suas desigualdades periódicas. Lagrange demonstra, então, que o movimento médio Lua é efetivamente acelerado, sem explicar a sua causa.

Partindo do artigo de Lagrange, neste mesmo ano, Laplace discorre sobre a causa da aceleração da Lua(LAPLACE, 1773-1776), afirmando que sua equação secular só pode ser explicada por dois procedimentos: variando as suposições segundo as quais calculamos os movimentos dos corpos celestes ou supondo a existência de causas estrangeiras à gravitação. E, por motivos que já comentamos, ele é levado a crer que a segunda opção deve ser descartada.

Em seguida, no mesmo artigo, Laplace considera as desigualdades seculares dos planetas, afirmando que:

"En considérant les masses des planètes comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, leur action serait insensible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions. Après un temps considérable, l'action réciproque des planètes pourrait devenir sensible ; mais cette action ne pourrait se manifester que par les changements qu'elle occasionnerait à la longue dans les éléments des orbites, c'est-à-dire dans la position des nœuds et de la ligne des apsides, dans l'excentricité, l'inclinaison et surtout dans les moyens mouvements. Ces sont, par conséquent, les plus considérables de toutes, et celles dont il importe le plus fixer la valeur par la théorie" (LAPLACE, 1773-1776, p.238-239).

Euler e Lagrange, ao estudarem as desigualdades seculares dos movimentos médios de Júpiter e Saturno, haviam encontrado resultados contraditórios, o que motiva Laplace a retomar estes cálculos. Debruçando-se, então, sobre a determinação das desigualdades seculares dos movimentos médios dos planetas, ele mostra que, se considerarmos as excentricidades e as inclinações pequenas e levarmos em conta apenas os termos de primeira ou segunda ordem de todos os elementos, as desigualdades seculares de todos os elementos das órbitas apresentarão termos proporcionais ao tempo, salvo as dos movimentos médios. Assim sendo, Laplace é levado a concluir que os movimentos médios não estão sujeitos a variações seculares. No entanto, as fórmulas que Laplace havia encontrado para as desigualdades seculares dos planetas só valem para um tempo limitado, podendo não acontecer o mesmo ao se considerar um tempo arbitrário.

Desta vez a influência se inverte, pois esta falha dará origem a um artigo de Lagrange, "*Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes*"(LAGRANGE, 1774). Neste trabalho são apresentadas as formulas gerais pelas quais podemos determinar os elementos das órbitas para um tempo qualquer. Seu método consiste em encontrar a forma das integrais das equações diferenciais que descrevem os movimentos dos planetas e variar, em seguida, os coeficientes para deduzir as leis das variações seculares dos elementos. Mesmo antes que o artigo fosse publicado, Laplace o utilizou(LAPLACE, 1775) para encontrar as expressões analíticas exatas das desigualdades seculares dos elementos das órbitas, demonstrando que, se considerarmos apenas a ação de dois planetas, as inclinações e excentricidades de suas órbitas serão muito pequenas. Laplace demonstra, ao mesmo tempo, que as desigualdades do movimento médio são nulas, o que tem como conseqüência uma teoria completa e rigorosa de todas as desigualdades seculares das órbitas dos planetas(LAPLACE, 1775, p.335).

O método analítico introduzido por Lagrange, e utilizado por Laplace neste último artigo, será retomado por este em muitos outros trabalhos para evitar as complicações dos métodos ordinários de eliminação. Por exemplo, em um artigo publicado em 1776(LAPLACE, 1776), ele empregará o mesmo método para determinar as desigualdades seculares do movimento dos afélios e das excentricidades de Júpiter e de Saturno, uma vez que, para este problema, Lagrange já havia tratado dos nós e das inclinações[17].

No mesmo ano de 1776, Lagrange publica sua demonstração de que os movimentos médios dos planetas sofrem apenas perturbações periódicas(LAGRANGE, 1776), usando fórmulas diretas para as variações dos grandes eixos dos planetas. Neste trabalho, ele mostra que estas variações não podem conter termos proporcionais ao tempo, qualquer que seja a ordem daqueles termos relativos à excentricidade e à inclinação empregados na aproximação. Este resultado assegura a primeira parte do problema da estabilidade tal como era concebido na época: aquela que é relativa às variações dos movimentos médios.

Alguns anos mais tarde, em 1781 e 1782, Lagrange publica uma espécie de resumo em duas partes dos artigos parciais que ele havia escrito anteriormente. Na segunda parte desta "*Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*" (LAGRANGE, 1781-1782), Lagrange enuncia explicitamente que, embora a determinação das

[17]É oportuno comentar aqui a importância dos trabalhos de Lagrange neste problema, que são algumas vezes menosprezados em relação aos resultados de Laplace. O matemático Michel Herman, que não apenas colaborou com resultados fundamentais no atual tratamento do problema da estabilidade mas que era também um estudioso da história deste problema, costumava afirmar que tudo havia sido feito por Lagrange, tendo o nome de Laplace alcançado esta proeminência devido a sua influência política [Comunicação pessoal].

variações dos elementos dos planetas por alguns séculos seja suficiente para as necessidades da astronomia, a questão mais complexa de conhecer estas variações para um tempo arbitrário (podendo se chegar a estabelecer seus períodos) constitui um problema central para a astronomia física.

Para esta teoria: " *le but est de suppléer aux observations, en découvrant, d'après elles, les lois qui règlent la marche des phénomènes ; et parmi ces lois il n'en est peut-être point de plus intéressantes à connaître que celles des variations lentes et insensibles des orbites des planètes, puisque cette connaissance peut seule nous mettre en état de prononcer sur l'importante question de la stabilité de notre système planétaire*"(LAGRANGE, 1781-1782, p.279).

Considerando todos os elementos como variáveis de uma só vez, Lagrange conclui que os movimentos médios dos planetas não sofrem variações constantemente crescentes ou de período muito longo. Mas adianta também que, aumentando a precisão deste resultado até a segunda ordem das excentricidades e das inclinações, pode-se encontrar termos seculares para o movimento médio. Na desenrolar deste trabalho ele irá novamente considerar os movimentos de Júpiter e Saturno, mostrando que, para estes planetas, tais variações são nulas.

Para alcançar seu objetivo, era preciso, contudo, demonstrar, seguindo o exemplo dos movimentos médios, que os outros elementos das órbitas, como a excentricidade e a inclinação, não sofrem variações seculares que não sejam limitadas. Ele tenta assim encontrar as integrais das equações que determinam as leis de variação para então deduzir delas as expressões gerais das variações seculares[18]. Conclui enfim, que as excentricidades e as inclinações de Júpiter e Saturno permanecem pequenas.

Agora será a vez de Laplace se debruçar novamente sobre o problema. Entre 1784 e 1787, ele publica um artigo com o objetivo principal de eliminar as divergências e o que havia de incompleto nos resultados precedentes. Começa por mostrar que não há desigualdades seculares nos grandes eixos dos planetas, mesmo se estendermos a precisão dos métodos até os termos de terceira ordem das excentricidades e das inclinações. Empregando o resultado de Lagrange, que afirma ser possível estender a conclusão sobre os movimentos médios para um tempo ilimitado, Laplace

[18]Isto era feito mostrando-se que estas expressões não contêm arcos de círculo mas apenas senos e cossenos.

observa que isto é verdade apenas quando consideramos os movimentos médios como incomensuráveis entre si(LAPLACE, 1784-1787, p.50).

Além disso, Laplace reafirma sua preocupação com as variações seculares dos outros elementos, conhecidas apenas quando consideramos muito pequenas as excentricidades e as inclinações.

" *Mais les excentricités et les inclinaisons sont-elles renfermées constamment dans d'étroites limites ? C'est un point important du système du monde qui reste encore à éclaircir, et dont la discussion est la seule chose que laisse maintenant à désirer la théorie des inégalités séculaires*"(LAPLACE, 1784-1787, p.61).

Para responder a esta pergunta é preciso encontrar um método independente de qualquer hipótese, uma vez que o resultado anterior de Lagrange era ameaçado pela incerteza quanto às massas dos planetas. Laplace conclui assim que as desigualdades seculares das excentricidades e das inclinações não contém nem arcos de círculo nem exponenciais, o que quer dizer que as órbitas se distanciam muito pouco- a variação permanecendo entre limites fixos- da forma circular, mantendo sempre os mesmo grandes eixos. Mas para isto Laplace emprega a mesma redução linear que havia sido utilizada por Lagrange, considerando somente as primeiras potências das excentricidades e das inclinações.

O próprio Laplace corrige seu argumento em 1785(LAPLACE, 1785-1788), afirmando que esta aproximação é insuficiente e que em sua teoria de Júpiter e Saturno são consideradas as desigualdades seculares que dependem do quadrado (ou de potências superiores) das excentricidades e das inclinações. Reconhece, então, variações consideráveis nas órbitas destes planetas que têm períodos de mais de nove séculos, o que mostra que as aproximações anteriores são insuficientes, forçando-o a aumentar a precisão em relação à ordem dos termos associados à excentricidade e à inclinação.

"*Il se rencontre dans cette théorie des inégalités dépendantes de ces puissances et qui, par les intégrations, acquièrent de grands diviseurs et deviennent par là très sensibles*"(LAPLACE, 1785-1788, p.143)[19].

Laplace conclui finalmente que não há desigualdades seculares nos movimentos

[19]Observamos que Laplace considerava como divisores o inverso da variável, daí falar-se de "grandes divisores" ao invés de "pequenos divisores", como falamos hoje em dia.

médios destes planetas, porque isto iria depender destes movimentos serem comensuráveis entre si, o que, segundo ele, não pode acontecer em nosso sistema solar. Daí extraímos uma importante conclusão: Laplace reconhece os problemas decorrentes da comensurabilidade dos movimentos médios, especialmente em relação às desigualdades seculares, no entanto ele elimina *a priori* a possibilidade disto acontecer. Mas ainda assim, nem tudo está resolvido...

"*Si les moyens mouvements de deux planètes, sans être exactement commensurables, approchent cependant beaucoup de l'être, il existera dans la théorie de leurs mouvements des inégalités d'une longue période, et qui, si elles ne sont pas connues, pourront donner lieu de penser que les mouvements de ces planètes sont assujettis à des équations séculaires*"(LAPLACE, 1785-1788, p.148).

Esta é justamente a explicação para a constatação das anomalias dos movimentos de Júpiter e Saturno: a quase-comensurabilidade de seus movimentos médios produz desigualdades que, mesmo sendo periódicas, podem ter períodos muito grandes, que no exemplo será de nove séculos! Na verdade, este é um problema chave no estudo da estabilidade, não podermos distinguir entre um movimento aperiódico e um movimento periódico de período muito longo.

Na continuação do mesmo artigo, Laplace, negligenciando este problema, resume assim seus resultados sobre a estabilidade:

"*J'ai fait voir ailleurs que, quelles que soient les masses des planètes et des satellites, par cela seul que tous ces corps tournent dans le même sens et dans des orbes peu excentriques et peu inclinés les uns aux autres, leurs inégalités séculaires sont périodiques. Ainsi le système du monde ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très petite quantité*"(LAPLACE, 1785-1788).

Em 1787, ele continua insistindo sobre os resultados que o conhecimento das variações seculares pôde oferecer: "*l'un est l'uniformité des moyens mouvements célestes, l'autre est la stabilité du système planétaire. Je suis parvenu autrefois, par approximation, au premier de ces résultats que M. de la Grange a depuis démontré en rigueur (...). Quant à la stabilité du système planétaire, j'ai prouvé dans nos Mémoires pour l'année 1784*"(LAPLACE, 1787-1789).

Ambos os matemáticos do século XVIII, servindo-se dos resultados um do outro, demonstraram que as variações dos grandes eixos das órbitas são oscilações periódicas de amplitude finita em torno de um valor médio. Valor médio este que também pode mudar. No entanto, esta variação era negligenciada, visto se dar de forma muito lenta e ser da ordem dos quadrados das massas dos planetas[20]. O que equivale a dizer que os planetas não poderiam escapar das suas órbitas ou virem a se chocar uns sobre as órbitas dos outros.

Quanto às excentricidades e às inclinações, Laplace demonstrou que suas desigualdades são periódicas e oscilam entre limites bem determinados, não colocando problema algum para a estabilidade.

Todas as desigualdades seculares são periódicas. Deste modo enunciava-se a resposta ao problema da estabilidade do sistema solar.

As forças resultantes da atração mútua entre os planetas introduzem, nas equações diferenciais que descrevem seus movimentos, termos pequenos que são multiplicados pela razão entre as suas massas e a massa do Sol. Este método, empregado por Lagrange e Laplace, consiste em integrar estas equações como se estes termos não estivessem presentes e adicionar uma variação à constante de integração encontrada ao final. Como já observamos anteriormente, estas variações, que podem ser compostas de termos periódicos— cujos valores dependem da configuração dos planetas— ou de termos seculares— independentes desta configuração e associados aos elementos da órbita elíptica— crescem com o passar do tempo.

Todas as conclusões de Lagrange e Laplace sobre as desigualdades seculares dos planetas levam em conta apenas a primeira aproximação dos termos que contêm as massas. Como estas massas são pequenas, eles pressupõem que se pode negligenciar seus quadrados e seus produtos. Se questionada esta premissa, a demonstração da estabilidade do sistema solar estará em risco. Veremos nas seções seguintes que é exatamente esta crítica que está na origem das teorias que se desenvolvem posteriormente.

Como observamos no início deste capítulo, o mais importante para Laplace é que todas as demonstrações façam uso apenas da lei de atração universal, constituindo a prova final de que esta lei basta à estabilidade do sistema do mundo: a ciência elimina

[20] Estas massas são de fato muito pequenas pois, nos problemas da mecânica celeste não se considera as massa absoluta de um planeta mas a razão entre esta e a massa do Sol.

assim a necessidade de apelar para um Ser exterior e Todo Poderoso para recolocar em ordem este sistema.

Mesmo Laplace não se exime da questão da causa física da atração, chegando a afirmar, em outros trabalhos, que a arrumação dos planetas é efeito das leis do movimento, mas que estas leis podem depender de um fenômeno mais geral, como da existência de uma matéria nebulosa. No entanto, a conservação do sistema planetário não participa dos desígnios do Autor da natureza:

"*L'attraction mutuelle des corps de ce système ne peut pas en altérer la stabilité comme Newton le suppose*"(LAPLACE, 1796, p.453).

6.2.4 O problema das aproximações de ordens superiores: os passos posteriores de Le Verrier e Poisson

Do que dissemos até este momento, podemos concluir que a concepção de estabilidade de Lagrange e Laplace é clara: *estabilidade igual a periodicidade.* Seus trabalhos demonstraram, com sucesso, que os termos seculares não poderiam intervir na estabilidade, uma vez admitida como suficiente a primeira aproximação relativa às massas dos planetas.

Em um artigo apresentado à *Académie des Sciences* em 1808, Poisson será o primeiro a considerar os termos de ordem superior das massas(POISSON, 1808). Neste artigo, ele observa que, se considerarmos os termos de segunda ordem, os grandes eixos sofrerão lentas variações em sua forma. O trabalho de Poisson emprega essencialmente os mesmos métodos de seus antecessores, procurando estendê-los aos termos de ordem superior. Há, todavia, uma novidade na abordagem deste matemático do início do século XIX, e ela consiste em observar que o sistema pode ser considerado estável mesmo sem a garantia da periodicidade estrita. Se, após um certo intervalo de tempo, retornamos às proximidades de uma certa configuração, o sistema pode ser dito *estável.* Esta propriedade, freqüentemente citada por Poincaré, será denominada *estabilidade de Poisson.*

No entanto, o defeito mais profundo dos métodos de Laplace e Lagrange começará a ser enxergado com os trabalhos Le Verrier(LE VERRIER, 1856). Este astrônomo generaliza os resultados de Laplace com aproximações de ordem superior, acabando por descobrir que seu importante teorema é falso. As desigualdades seculares dependem de equações diferenciais e, se levamos em conta os termos de terceira ordem nestas equações e as integramos por aproximações sucessivas, as integrais são séries que dependem de um parâmetro que pode ser a massa, a excentricidade ou a inclinação.

Portanto, é preciso saber se estas séries *convergem*, para só assim vermos resolvido o problema da estabilidade.

Le Verrier observa esta questão e acredita na convergência das séries, uma vez que as aproximações sucessivas da solução fazem aparecer modificações cada vez menores. Sem entrarmos nos detalhes do trabalho de Le Verrier, indicamos um artigo, bastante instrutivo, escrito por Jacques Laskar(LASKAR, 1992), matemático contemporâneo e um dos pioneiros na aplicação da abordagem de sistemas dinâmicos na astronomia, que comenta (referindo-se ao artigo de Le Verrier que citamos):

"Le Verrier emite aqui uma nova formulação do problema da estabilidade do sistema solar. O estudo de Laplace não é mais suficiente. Ele representa apenas o primeiro termo de um desenvolvimento em série infinito"(LASKAR, 1992, p.188).

Mas há também, no ponto de vista de Le Verrier, uma circunstância que passou despercebida: o fato de que as modificações que aparecem nas aproximações diminuem não garante matematicamente a convergência. Não nos surpreende que Le Verrier não tenha podido notar este problema, visto tratar-se de um astrônomo. Efetivamente, tratando-se de aplicações, o fato de os termos diminuirem, muitas vezes, é suficiente. Neste exemplo, Laskar observa que a questão da convergência para um astrônomo apresenta um significado bem diferente do que para o matemático.

Do ponto de vista matemático, o que acontece é que a convergência depende das condições iniciais e, para algumas desta condições, teremos o "problema dos pequenos divisores". Trata-se de um problema equivalente ao que havia sido percebido (e erroneamente contornado) por Laplace, mas será preciso esperar até Poincaré para se entender plenamente as questões envolvidas no problema da convergência matemática destas séries.

Capítulo 7

As primeiras definições da estabilidade no conjunto de trajetórias

7.1 O que pensa Poincaré sobre a relação entre a matemática e a física?

A grande inovação de Poincaré no âmbito das equações diferenciais foi encarar o conjunto de soluções de uma equação como um todo, para estudar sua topologia. De uma certa forma, trata-se de um retorno à geometria que Laplace tanto havia criticado em prol da análise; mas desta vez não mais à geometria sintética empregada por Newton, mas a uma outra geometria, propriamente qualitativa. Poincaré vai ainda mais longe, propondo que podemos simplificar o estudo do conjunto de soluções se olharmos para um sub-conjunto que responda a algumas perguntas sobre o comportamento descrito pela equação, visão que, em seguida, evoluirá para a descrição dos conjuntos assintóticos, como mencionamos no terceiro capítulo.

Que aspectos topológicos do conjunto de soluções podem ser considerados interessantes? Que sub-conjunto de soluções é interessante estudar? Todas estas noções são definidas matematicamente de diferentes maneiras e variam historicamente. Falamos de algumas destas definições na primeira parte da tese. Contudo, ainda não dissemos, com toda a intensidade que o fato merece, que várias das definições empregadas por Poincaré são inspiradas diretamente por problemas físicos aos quais a teoria pretende ser aplicada.

Poincaré afirmava, ao justificar a importância de seus métodos qualitativos, que eles são úteis por dois motivos: porque podem facilitar a busca das soluções pelos métodos quantitativos e porque possuem interesse em si mesmos. Cada um dos motivos citados é justificado por uma analogia.

Para justificar a importância interna dos métodos qualitativos Poincaré empregava uma analogia com outra área da própria matemática: a resolução das equações algébricas[1]. Nesta área, como já comentamos anteriormente, o estudo qualitativo pode fornecer alguns referenciais para se chegar à solução explícita.

A palavra analogia não é empregada por acaso: Poincaré defende a analogia como o principal guia para se extrair uma lei da experiência[2].

"Em uma palavra, para extrair da experiência a lei, é preciso generalizar(...). Mas como generalizar? Evidentemente, toda verdade particular pode ser estendida de uma infinidade de maneiras. Entre os mil caminhos que se abrem diante de nós, é preciso fazer uma escolha, ao menos provisória; nessa escolha, quem nos guiará?

Só pode ser a analogia"(POINCARÉ, 1995, p.91 e 92).

É justamente por possibilitar uma analogia estrutural entre as diversas realidades físicas que a matemática serve à física:

"Em suma, o objetivo da física matemática não é só facilitar ao físico o cálculo numérico de certas constantes, ou a integração de certas equações diferenciais.

Mais ainda, ele é sobretudo o de facilitar ao físico o conhecimento da harmonia oculta das coisas, fazendo com que as veja sob uma nova perspectiva"(POINCARÉ, 1995, p.94).

Já mencionamos que Poincaré reintroduz a geometria na mecânica celeste; a geometria, que havia sido expulsa pelos analistas do século XVIII como um entrave ao avanço desta ciência; mas, na realidade, trata-se de uma nova geometria. Poincaré, contudo, raramente privilegia uma área da matemática em detrimento de outras; ao invés disso, ataca várias áreas ao mesmo tempo, mostrando as relações que elas mantêm. Sob o ponto de vista de Poincaré, a análise matemática nunca deixou de ser um instrumento fundamental da física matemática:

[1]A teoria das curvas algébricas também é mencionada por Poincaré como uma analogia interna.

[2]Seguremos, nesta seção, o raciocínio de Poincaré em *O Valor da Ciência*. Para uma discussão mais ampla sobre o papel da analogia na obra de Poincaré, principalmente na discussão sobre a relação entre a matemática e a física, indicamos alguns textos de Michel Paty. Por exemplo, (PATY, 1998-1999), sobretudo sobre o papel da equação diferencial como signo da abordagem físico-matemática; e ainda, sobre a analogia matemática e seu papel na física , (PATY, 2000).

"A análise matemática (...) não será portanto um jogo inútil do espírito? Ela só pode dar ao físico uma linguagem cômoda; não será esse um serviço medíocre, do qual se poderia até prescindir? E não seria até mesmo o caso de temer que essa linguagem artificial seja um véu entre a realidade e o olho do físico? Longe disso: sem essa linguagem, a maior parte das analogias íntimas das coisas permaneceria para sempre fora do nosso conhecimento; e teríamos sempre ignorado a harmonia interna do mundo, que é, como veremos, a única verdadeira realidade objetiva"(POINCARÉ, 1995, p.8).

Por outro lado, as analogias físicas servem ao matemático para guiá-lo sobre os problemas importantes a resolver, fornecendo um pressentimento da resolução antes que um raciocínio rigoroso seja estabelecido. Segundo Poincaré, a relação entre física e matemática, ou entre as diversas físicas ou as diversas matemáticas, faz-se sobretudo por analogia.

Compreendemos, então, a segunda motivação do ponto de vista qualitativo, conforme descrita por Poincaré: os métodos qualitativos são interessantes em si mesmos, porque podem fornecer diretamente algumas respostas aos problemas da mecânica celeste. O valor próprio da abordagem qualitativa é justificado por sua importância para o estudo de fenômenos físicos, fenômenos dinâmicos dos quais a mecânica celeste é um paradigma.

"Explico-me: como os antigos compreendiam a lei? Era para eles uma harmonia interna, por assim dizer estática e imutável; ou então era como um modelo que a natureza tentava imitar. Para nós, uma lei não é mais isso, de modo algum; é uma relação constante entre o fenômeno de hoje e o de amanhã; em uma palavra, é uma equação diferencial.

Essa é a forma ideal da lei física; pois bem, a lei de Newton foi a primeira a tomar essa forma. Se, em seguida, tal forma foi incorporada à física, foi precisamente copiando tanto quanto possível a lei de Newton, imitando a mecânica celeste"(POINCARÉ, 1995, p.111).

Pela sua relevância na descrição de fenômenos naturais importantes, as equações diferenciais ganharam um estatuto na atividade matemática, isso se deu já com Newton e sua lei da gravitação que, segundo Poincaré, é o primeiro exemplo de equação diferencial. Poincaré funda novos métodos para se atacar o problema posto por uma equação diferencial, problema que depende intimamente da pergunta que se pretende responder. Insistimos que, com Poincaré, é a própria noção de solução do problema das equações diferenciais que se modifica. Enquanto nos trabalhos de seus predecessores a solução do problema se identificava com a solução da equação, Poincaré propõe agora que as propriedades qualitativas do conjunto de soluções podem ser encontradas sem que as respectivas soluções sejam explicitadas, possuindo tais propriedades interesse em si mesmas, relativamente às perguntas que se quer responder sobre o comportamento das soluções.

Essas perguntas podem estar sendo motivadas por problemas físicos, como é o caso da mecânica celeste, mas o encadeamento interno das idéias matemáticas que irão advir é autônomo em relação à física que as inspirou. A relação de analogia do problema físico com a matemática é exterior à matemática, incidindo mais sobre o matemático que a concebe que sobre as idéias matemáticas propriamente ditas. Contudo, e esta é uma pergunta verdadeiramente intrigante, uma vez constituída a teoria matemática, ela pode, efetivamente, vir a se aplicar à física. Deixemos de lado, por enquanto, essa questão, sobre a qual voltaremos a falar em nossas conclusões.

7.1.1 A introdução do problema da estabilidade

Poincaré inicia a terceira parte do artigo "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" analisando o caso especial das singularidades de tipo centro e sua relação com o problema da estabilidade. É nela que ele propõe pela primeira vez uma definição de estabilidade, inspirada na analogia com os problemas da mecânica celeste.

Já tivemos a oportunidade de comentar que as trajetórias periódicas possuem um papel fundamental na análise qualitativa de Poincaré. Isto se deve, em parte, à importância desse tipo de solução nos problemas da mecânica celeste. Vimos a ênfase com que Lagrange e Laplace buscavam demonstrar que as desigualdades que apareciam nos desenvolvimentos analíticos eram periódicas. Lagrange, e mesmo Euler[3], já haviam dado exemplos de soluções periódicas propriamente ditas, mas Hill será o primeiro a dar um exemplo de solução periódica no problema dos três corpos,

[3]Soluções homográficas.

empregando-a, além disso, como "uma brecha" para a análise das soluções que estão em sua vizinhança[4]. Como já observamos, enfocar o conjunto de soluções em lugar de uma solução individual é justamente a novidade do ponto de vista qualitativo de Poincaré, no entanto, Hill empregou uma abordagem de mesma natureza em sua exposição da teoria da Lua. Não se trata de uma coincidência: Poincaré foi influenciado pelos trabalhos de Hill, que efetivamente foi o primeiro a demonstrar um resultado de estabilidade, para o caso particular do movimento da Lua.

Mas voltemos à terceira parte da memória de Poincaré, onde o problema da estabilidade torna-se central. Na verdade, é neste momento que Poincaré passa a denominar as soluções como *trajetórias* e reescreve a equação tomando o tempo como variável independente. A abordagem qualitativa torna-se menos justificada pelo que ela pode ajudar na resolução quantitativa e, conseqüentemente, mais autônoma. Com a reformularão do problema, a analogia com os problemas da mecânica celeste torna-se mais freqüente.

Nas duas primeiras partes da memória, Poincaré trata implicitamente de questões relacionadas à estabilidade. Basta examinar os exemplos em que considerava o movimento de um ponto móvel no plano, onde colocava questões tais como: Existe uma região do plano onde o ponto móvel permaneça? Este ponto descreve uma curva fechada?

Esses exemplos correspondem a casos em que as trajetórias podem ser encontradas explicitamente. No primeiro, trata-se de um caso especial onde todas as trajetórias são curvas fechadas, e o resultado em que a trajetória retorna exatamente ao seu ponto de partida é interpretado como um caso de estabilidade completa. Em seguida, para dois exemplos de primeira ordem e grau superior, a trajetória pode retornar infinitas vezes no interior de um ciclo, tão pequeno quanto se queira, em torno do ponto de partida; a diferença entre os dois exemplos é que, em um, a trajetória por um certo ponto permanecerá no interior de uma coroa circular e, no outro, ela irá preencher todo o plano. Já em um quarto exemplo, se uma trajetória sai deste ciclo, ela não retorna e diz-se que ela é instável. É neste mesmo sentido que, no quinto exemplo, a trajetória considerada é instável, com a diferença de que, neste caso, existe uma

[4]Referimo-nos à citação de Poincaré que se encontra no terceiro capítulo de nossa tese e ao trabalho de Hill (HILL, 1878).

corôa circular tal que, todas as trajetórias que possuem ponto inicial dentro da corôa, nela permanecem indefinidamente.

Analisaremos em detalhe esses exemplos para mostrar que Poincaré, nas primeiras partes do trabalho, não apenas incluía a preocupação com a estabilidade, mas tinha uma idéia clara dos exemplos matemáticos no plano que corespondiam, por analogia, à estabilidade a ser demonstrada em dimensões superiores.

Na terceira parte, Poincaré observa então que, de acordo com o resultado de classificação local em dimensão dois[5], para o caso das equações polinomiais de primeira ordem e primeiro grau, as trajetórias estáveis são os ciclos e as instáveis são as espirais. Conclui então, visto ser excepcional a circunstância em que as trajetórias são ciclos, que a instabilidade é a regra e a estabilidade a exceção. Notemos que, neste enunciado, a estabilidade é propriedade de uma trajetória e o único caso de estabilidade é equivalente à estrita periodicidade. Esta segunda restrição será eliminada com a definição de estabilidade que Poincaré apresentará logo em seguida:

"*Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r*"(POINCARÉ, 1885a).

A estabilidade continua sendo atributo de uma trajetória, mas passa agora a diferir um pouco da solução periódica. Poincaré observa que um ponto móvel, descrevendo uma trajetória estável, goza de um tipo periodicidade de natureza particular. Enfatizando o ponto de partida, pelas razões que vimos sobre a manutenção da configuração inicial dos astros, a estabilidade é obtida quando o sistema volta a se aproximar infinitas vezes desta configuração. Este tipo de estabilidade é exatamente a que havia sido proposta por Poisson e que passará a se chamar, mesmo nos trabalhos futuros de Poincaré, "estabilidade de Poisson" ("*stabilité à la Poisson*").

Em um artigo recente de história da matemática que analisa o ponto de vista qualitativo de Poincaré, Chabert e Dalmedico(CHABERT & DAHAN DALMEDICO, 1992) afirmam que a estabilidade, para Poincaré, era propriedade de uma trajetória individualmente. Nossa opinião é que esta conclusão é, no mínimo, precipitada. Foi

[5]Terceiro capítulo desta tese.

Poincaré o primeiro a analisar o conjunto de trajetórias como um todo, a estabilidade não podendo ser, para ele, uma questão individual de cada trajetória. Mesmo se isto for verdade quanto à definição da estabilidade que acabamos de mencionar, Poincaré afirmará em seguida que a importância desta definição é apenas teórica, visto que, na prática, é preciso determinar uma região do espaço onde o ponto móvel permaneça indefinidamente(POINCARÉ, 1885a). Nos exemplos que descrevemos, que nos são apresentados nas duas primeiras partes, Poincaré já procurava determinar uma região deste tipo, empregando para isto a presença de um ciclo sem contato que, uma vez atravessado pela trajetória, garantiria a impossibilidade de seu retorno.

Na continuação da terceira parte, Poincaré procurará sempre determinar se existe uma região em que as trajetórias permaneçam indefinidamente. Estabelecer regiões deste tipo permite reduzir a descrição global do comportamento das trajetórias à análise do comportamento nestas regiões, uma vez que elas contêm informações *interessantes* sobre o conjunto de trajetórias. Esta qualificação de informações *interessantes* é, como dissemos na seção anterior, diretamente relacionada aos problemas astronômicos nos quais elas se aplicam. A identificação de sub-conjuntos *interessantes* do conjunto de trajetórias também estava em jogo, por exemplo, quando falávamos dos "comportamentos assintóticos" no terceiro capítulo.

Mas, por enquanto, nesse trabalho de Poincaré— no único caso em que podemos ter uma visão global das trajetórias— temos, em geral, espirais, que nunca retornam à vizinhança de seus pontos de partida e nem permanecem em uma região dada. A estabilidade só é obtida quando todas as trajetórias são ciclos, mas trata-se aqui de um caso extremamente excepcional. O sentido da palavra *exceção* neste contexto está associado à excepcionalidade de uma singularidade de tipo *centro*, como vimos no segundo capítulo. Justamente por esta razão, Poincaré dedica um capítulo especial ao que ele chama de *Teoria dos Centros*, que merece ser analisado em detalhe, se desejarmos investigar o significado matemático da noção de *exceção*, tal como ela é empregada, por ele, naquele momento.

7.1.2 "O caso fisicamente importante é matematicamente excepcional"

No caso bidimensional, mapeado sobre a esfera, só há estabilidade completa no caso em que a esfera é inteiramente recortada por trajetórias fechadas. Poincaré afirma, então, que esta situação é excepcional uma vez que, para obtê-la, precisamos garantir que um número infinito de condições possam ser satisfeitas simultaneamente.

Mas é justamente este o caso que se refere às ditas "equações gerais da dinâmica", denominação usada, na época, para designar o caso que hoje conhecemos como "conservativo", isto é, onde há conservação de energia, e que corresponde particularmente aos problemas da mecânica celeste. No entanto, se examinarmos a participação dos sistemas deste tipo no conjunto de todos os sistemas dinâmicos, saberemos que eles são extremamente excepcionais. Mesmo sem trabalhar diretamente sobre o conjunto dos sistemas dinâmicos, Poincaré (bem como Birkhoff) já tinha uma forte intuição sobre este fato. Que sistemas dinâmicos de caráter excepcional recebam o nome de "equações gerais da dinâmica", indica uma separação ou uma independência entre a excepcionalidade física e a excepcionalidade matemática. Acreditamos que essa denominação se refere à importância física dessas equações.

Poincaré começa a terceira parte de sua memória pela análise do caso excepcional sobre a esfera. Sua descrição local das vizinhanças das singularidades, que analisamos no segundo capítulo, fazia uso das raízes de uma certa equação (equação característica) associada aos termos lineares do desenvolvimento em série de X e Y, que são as funções que definem o sistema diferencial em duas dimensões.

Quando as raízes são imaginárias puras, a singularidade do sistema linear é um centro. Perturbando esta situação inicial, isto é, considerando o caso não-linear, o centro em geral não se mantém. Sabemos, no entanto, pela classificação global, que as trajetórias, quando não são ciclos, são espirais, o que resolve o problema da classificação local. Este foi o procedimento empregado por Poincaré para resolver o problema da linearização local. Possuir uma singularidade de tipo centro já é uma situação excepcional, devido à exigência de que as raízes sejam imaginárias puras (caso excepcional de número complexo). Assim, não podendo estudar a equação a partir da sua aproximação linear, Poincaré procura encontrar uma integral F desta equação que seja constante, $F(x, y) = cte$, sobre as trajetórias do campo (X, Y) que são curvas de nível da função. Parte-se da suposição de que sabemos que estas trajetórias são ortogonais às trajetórias do campo gradiente associado a F, isto é, $\langle \nabla F, (X, Y) \rangle = 0$.

Utilizando fortemente a hipótese de que (X, Y) é um campo polinomial, Poincaré busca determinar a função F a partir dos termos F_i na expressão $F = F_2 + F_3 + F_4 + ...$, supondo, por hipótese, que ela não deve conter termos de grau 0 e 1. Conclui-se, então, que $F_2 = x^2 + y^2$ a menos de uma mudança de coordenadas linear. Os outros termos serão encontrados por um raciocínio análogo ao que era empregado nos problemas da mecânica celeste: procuramos os termos F_{i+1} iterativamente a partir dos F_i, utilizando coordenadas polares (ρ, ω) e supondo que todos os F_i possuem apenas termos trigonométricos em seus desenvolvimentos em série. No entanto, surge um problema quando se chega na determinação do termo F_4 pois este termo depende da integração de uma expressão do tipo $C_0 + C_2 cos(2\omega) + D_2 sen(2\omega) + ...$

Os termos C_i e D_i são constantes e a constante C_0 possui um papel análogo ao dos termos seculares, uma vez que, se C_0 não se anula, existe um termo proporcional a ω na expressão de F_4. Isto contraria a exigência inicial de que todos os termos da expansão em séries dos F_i sejam trigonométricos e este mesmo problema reaparece para todos os F_i em que i é par.

Mas, se as constantes em questão são todas nulas, podemos construir a função F deste modo, assegurando que a singularidade é um centro e todas as trajetórias são fechadas. Todavia, não podemos afirmar reciprocamente que, se tais constantes não se anulam, a singularidade não é um centro. Isto porque o termo não periódico que aparece, fora das funções trigonométricas, pode ser devido, por exemplo, à expansão em série da função seno. É sobre este ponto que intervém uma inovação em relação ao tratamento clássico dos problemas da mecânica celeste: os *ciclos sem contato* de Poincaré[6]. O fundador do ponto de vista qualitativo demonstra que se as constantes não são todas nulas ao mesmo tempo, podemos construir uma família de ciclos sem contato em torno da singularidade e, como sabemos de resultados anteriores (que

[6]Nós os definimos no capítulo três.

comentamos no terceiro capítulo), a presença de um ciclo sem contato indica instabilidade, isto é, que uma curva que o atravessa em um sentido não poderá voltar a interceptá-lo.

Se no desenvolvimento da função F encontramos um termo de ordem par, cuja expansão não contém termo constante, devemos continuar o mesmo processo até encontrar um termo que contenha uma constante não nula que indique a presença de um ciclo sem contato, logo instabilidade. Poincaré observa, neste ponto, a diferença entre este método e o seu análogo na mecânica celeste, observando que, nos procedimentos tradicionais, a presença de um termo secular não nos permite concluir imediatamente pela instabilidade das trajetórias, uma vez que este termo pode ser produto da expansão da função seno ou que as séries podem ser divergentes. O método de Poincaré permite afirmar a instabilidade assim que encontramos o "termo secular", mesmo que a série que define a função F não seja convergente[7].

Por outro lado, para garantir a estabilidade, torna-se necessário verificar se todas as constantes são nulas[8]. Mas estas constantes são em número infinito e não sabemos como reconhecer se um número infinito de condições é satisfeito. Isto leva Poincaré a afirmar que a instabilidade é a regra e a estabilidade, a exceção[9].

Podemos empregar um argumento análogo em dimensões mais altas. Já vimos que, ao aumentar a dimensão dos problemas, Poincaré irá introduzir novos métodos, como as seções que levam seu nome. Também já dissemos que uma das inspirações para a invenção deste método de seções foi a conjectura de que existe sempre uma solução periódica que pode funcionar como centro organizador da descrição das outras soluções em sua vizinhança. Isto é feito a partir de certas equações de variação que introduzem um sistema de coordenadas local na vizinhança da solução periódica, sendo este conveniente para representar as outras soluções de sua vizinhança. Reduzindo a duas dimensões o estudo das trajetórias vizinhas à curva fechada, Poincaré emprega o mesmo raciocínio que acabamos de citar, desta vez para determinar os

[7]Na verdade serão necessários alguns ajustes na demonstração de Poincaré, realizados por Hadamard.

[8]A anulação das constantes é uma condição necessária para que tenhamos um centro; Poincaré demonstra também que esta condição é suficiente.

[9]O raciocínio empregado aqui é como um algoritmo para encontrar constantes não nulas. Podemos dizer que garantimos a instabilidade sempre que o algoritmo termina, enquanto a estabilidade corresponde a um algoritmo infinito.

valores dos expoentes característicos λ_1 e λ_2[10].

Se estes valores são imaginários puros, temos um caso análogo ao de um centro em dimensão dois. O raciocínio que empregamos para a situação bidimensional é pois análogo até um certo ponto. Como no caso anterior, a solubilidade do problema depende da anulação de certas constantes e se estas não se anulam, podemos, seguindo o exemplo dos ciclos sem contato, construir superfícies sem contato em torno da trajetória fechada, o que indica instabilidade.

Poincaré enuncia da mesma forma a razão pela qual a estabilidade parece ser excepcional:

"*Le cas où tous les C_0 sont nuls semble d'abord très exceptionnel, puisque, pour le rencontrer, il faut remplir une infinité de conditions ; il n'en est pas moins très important, non seulement à cause des difficultés spéciales qu'il présente, mais encore parce que c'est celui sur lequel on tombe en étudiant les équations générales de la Dynamique*"(POINCARÉ, 1886a, p.207)[11].

Há, no entanto, uma diferença fundamental. Desta vez, Poincaré propõe um método para reconhecer *a priori* se estas constantes são nulas. A existência de uma função M real, positiva, holomorfa em x, y e t[12], bem determinada em todos os pontos da trajetória fechada, satisfazendo

$$\frac{\mathrm{d(MX)}}{\mathrm{dx}} + \frac{\mathrm{d(MY)}}{\mathrm{dy}} + \frac{\mathrm{d(M)}}{\mathrm{dt}} = 0$$

garante de antemão a anulação de todas as constantes, mesmo que elas sejam em número infinito.

A integral desta função, que já havia sido utilizada por Liouville, irá se chamar mais tarde *invariante integral*. Poincaré demonstra, na verdade, que a existência de um invariante integral garante que não existe superfície sem contato, o que leva à conclusão de que as constantes se anulam.

[10] Os mesmos que apareceram no quarto capítulo.

[11] Podemos hoje enxergar este problema do ponto de vista da variedade de sistemas, que possui dimensão infinita. O caso considerado por Poincaré é, nesta variedade, um sub-conjunto de codimensão infinita. Isto é justamente o significado da anulação de um número infinito de constantes e, mesmo que, em sua época, não se tivesse a definição de uma variedade de sistemas, Poincaré não estava longe de perceber a excepcionalidade, sobre esta variedade, dos sistemas considerados em sua "teoria dos centros".

[12] Coordenadas do sistema de coordenadas local, introduzido na vizinhança da trajetória fechada.

Lindstedt havia desenvolvido um método de aproximações sucessivas para garantir a inexistência de termos seculares, mas a aplicabilidade deste método exigia um número excessivo de hipóteses. Poincaré demonstra que a equação estudada por Lindstedt possui um invariante integral, mostrando que o método em questão possui de fato uma generalidade muito maior do que se supunha.

Até aqui a analogia com a teoria dos centros em duas dimensões é perfeita. Mesmo o invariante integral teria o mesmo papel no primeiro caso, com a ressalva de que, para uma equação de primeira ordem, a sua existência é equivalente à existência de um fator de integração, que resolve o problema analiticamente. A diferença fundamental entre o caso bidimensional e o que tratamos agora é a presença de pequenos divisores, que podem fazer com que as séries divirjam.

Sem investigar propriamente os efeitos destas dificuldades, o que será feito em trabalhos posteriores, Poincaré termina sua memória comentando que a complexidade intrínseca dos problemas da mecânica celeste é conseqüência dos pequenos divisores e da quase-comensurabilidade dos movimentos médios.

7.2 Outras definições qualitativas para a estabilidade: uma questão física ou matemática?

O novo ponto de vista de Poincaré não teve, de início, muitos seguidores. Na verdade, só podemos falar de uma retomada massiva da análise qualitativa das equações diferenciais em meados do século XX. Neste meio tempo podemos falar de pesquisas pontuais, que mantinham interrelações, mas que não chegavam a constituir uma escola ou uma nova teoria.

Acompanharemos nesta seção, mesmo que de forma bastante resumida, as definições de estabilidade em outros problemas ou então feitas por outros pesquisadores, associadas ao ponto de vista qualitativo e partindo de duas vias distintas: a noção de estabilidade no problema das figuras de equilíbrio de um fluido e as primeiras redefinições da estabilidade do sistema solar.

7.2.1 Estabilidade do equilíbrio: a importância de Lyapunov

Os trabalhos mais importantes de Poincaré sobre as figuras de equilíbrio de um fluido em rotação são publicados por volta de 1885, mesmo ano da publicação da terceira parte do artigo "*Sur les courbes...*". No entanto, a noção de estabilidade aplicada nestes problemas difere consideravelmente daquela que analisamos até aqui pois, para a noção de estabilidade empregada em seus trabalhos sobre o equilíbrio dos fluidos, Poincaré vai se servir da definição empregada por Thomson e Tait[13]. Poincaré se interessa não somente pela questão da estabilidade, mas também pelo problema da variedade das formas de equilíbrio.

Neste contexto introduz-se o nome de Lyapunov, já mencionado anteriormente, embora sem a devida importância. Comentamos também que Thomson e Tait usavam uma aproximação linear do problema da estabilidade e será justamente contra esta simplificação não justificada que irá se voltar Lyapunov.

Os trabalhos, tanto de Poincaré quanto de Lyapunov, produzidos independentemente um do outro, terão por objetivo tornar mais rigorosos os métodos tradicionais. O livro mais conhecido de Lyapunov, na verdade sua tese de doutorado, foi publicado em russo em 1892 e traduzido em francês em 1907 como *Problème général de la stabilité du mouvement*(LYAPUNOV, 1907). Nesta obra Lyapunov menciona especificamente a memória de Poincaré "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*" como tendo influenciado este trabalho. No entanto, a opinião de Lyapunov sobre os artigos de Poincaré relativos às figuras de equilíbrio não é lá tão boa. Veremos resumidamente de que tratam estes trabalhos, procurando enfatizar suas diferenças.

Lyapunov começa a trabalhar sobre este assunto em 1884, em sua tese de mestrado, que é traduzida para o francês com o título *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation*(LYAPUNOV, 1904). Esse matemático russo emprega aqui, com o fim de justificar o princípio de estabilidade de Thomson e Tait, uma adaptação da demonstração de Dirichlet do teorema de Lagrange, para o caso de um fluido. Mas Lyapunov não fica satisfeito com sua

[13]Na verdade, Poincaré menciona apenas o nome de Thomson, referindo-se provavelmente a trabalhos anteriores ao livro.

demonstração, que considera ainda pouco rigorosa.

Lyapunov toma conhecimento dos trabalhos de Poincaré, pouco tempo após ter finalizado sua tese, iniciando com este uma correspondência, que se estendeu pelos anos de 1885 e 1886(SMIRNOV & YOUCHKEVITCH, 1987). Na primeira destas cartas, Lyapunov envia a Poincaré um exemplar em russo de sua tese, de cujo conteúdo o francês pôde tomar conhecimento por meio de uma análise dela feita por Radau.

Na segunda carta, tendo sido argüido sobre a diferença entre os seus trabalhos e os do matemático francês, Lyapunov afirma que, enquanto os trabalhos de Poincaré tratam de questões diversas (como a diversidade das possíveis figuras de equilíbrio), o dele se interessa sobretudo pela questão da estabilidade. Acrescenta, em seguida, que um ponto em comum entre eles é o uso que ambos fazem das funções de Lamé, a respeito das quais Lyapunov cita explicitamente Liouville, o que não é feito por Poincaré[14].

Mas na carta seguinte, Poincaré percebe a diferença entre a definição de estabilidade de Lyapunov e a sua, o que o leva a pedir novos esclarecimentos:

"O que devo entender por esta nova definição da estabilidade, que após uma perturbação suficientemente pequena o líquido deve se distanciar tão pouco quanto se queira da figura de equilíbrio, ao menos tanto tempo que não se produza, na superfície, saliências sob a forma de filetes ou de lâminas, tão delgadas quanto as supomos, em outros termos para que não hajam rugas. O que são estas saliências, estes filetes, estas lâminas e estas rugas?"[15].

Lyapunov responde, então, que se considerarmos perturbações iniciais genéricas, pode acontecer que, após perturbações infinitamente pequenas, a figura do fluido se afaste muito da figura de equilíbrio. Mas se isto se dá apenas por deformações que geram saliências delgadas e infinitamente vizinhas, podemos considerar que temos estabilidade. Sobre esta consideração irá se basear a definição matemática da estabilidade proposta por Lyapunov.

[14] O problema das figuras de equilíbrio é proposto a Lyapunov por Tchebychev, que havia encontrado Liouville em Paris em 1852. É possível então, como observam Smirnov e Youchkevicht(SMIRNOV & YOUCHKEVITCH, 1987), que Liouville tenha chamado a atenção de Tchebychev sobre o assunto.

[15] "*Que dois-je entendre par cette nouvelle définition de la stabilité qu'après une perturbation suffisamment petite le liquide doit s'écarter aussi peu qu'on voudra de la figure d'équilibre au moins aussi longtemps qu'il ne se produit pas, à la surface, de saillies sous forme de filets ou de lames, quelque mince qu'on les suppose, en d'autres termes pour qu'il n'y a pas de rides. Qu'est-ce que c'est ces saillies, ces filets, ces lames et ces rides?*"(SMIRNOV & YOUCHKEVITCH, 1987, p.7-8)

Ao fim desta correspondência, Lyapunov será mais enfático em relação às suas divergências com Poincaré, sobretudo porque este último não estende a precisão de suas demonstrações além da primeira aproximação. É interessante notar que será Lyapunov a desenvolver os métodos que trazem uma nova visão sobre o problema e estes métodos serão mais profícuos que os do próprio Poincaré (no estudo das figuras de equilíbrio), no que tange à definição de estabilidade e o estudo das formas não lineares. No entanto, isto só ficará mais claro em sua tese de doutorado, que diz respeito ao problema geral da estabilidade do movimento.

Os métodos anteriores tratam da estabilidade do equilíbrio apenas quando existe uma função potencial, o que torna pequeno o domínio de sua aplicabilidade. É na tentativa de encontrar outros métodos para verificar a estabilidade do equilíbrio em casos mais gerais que se insere o último trabalho de Lyapunov que acima citamos e que inicia com uma definição de estabilidade que adaptamos assim:

Uma solução, digamos $x(t)$, que possui como condição inicial $x_0(t_0)$, é estável se todas as soluções passando por condições iniciais $x_i(t_0)$, suficientemente próximas de $x_0(t_0)$, permanecem próximas de $x(t)$ para $t > t_0$. Se, além disso, estas soluções tendem para $x(t)$ quando $t \to \infty$, esta solução é dita assintoticamente estável.

Está claro que a estabilidade de uma trajetória, para Lyapunov, depende do comportamento das outras trajetórias que se iniciam em sua vizinhança. Isto quer dizer que esta definição se insere no conjunto das trajetórias, distanciando-se completamente da definição da estabilidade de uma trajetória individual. Comentamos anteriormente que Poincaré não se ateve à definição da estabilidade de uma certa trajetória, mas não podemos negar, por outro lado, que a definição de Lyapunov representa um avanço em relação à definição anterior, se queremos penetrar no conjunto de trajetórias, atitude da qual o próprio Poincaré nos ensinou a enxergar as vantagens.

Com esta ferramenta, o trabalho de Lyapunov irá se debruçar sobre outros problemas, por exemplo, a inversão do teorema de Lagrange. Este teorema fornece uma condição suficiente para a estabilidade mas não se sabia se havia um equilíbrio instável quando o potencial não atingisse um mínimo. Lyapunov demonstra, sob condições restritivas, a recíproca do teorema de Lagrange. Em particular, se pelo menos uma das raízes da equação associada à aproximação linear possui parte real diferente de zero, pode-se concluir pela instabilidade.

Haveria muitos outros aspectos da obra do matemático russo a serem mencionados, no entanto, interrompemos nossa análise aqui. Para uma análise histórica um pouco mais aprofundada dos métodos apresentados no livro *Problème général de la stabilité du mouvement*, indicamos um artigo de Jean Mawhin (MAWHIN, 1994).

7.2.2 A contribuição de Levi-Civita

Desde 1897 o matemático italiano Tullio Levi-Civita teve uma importante participação na discussão do problema da estabilidade, partindo seguramente do ponto de vista qualitativo. Seus primeiros trabalhos criticam, como Lyapunov, a atitude "linearista" pouco rigorosa dos autores ingleses. Tendo sido explicitamente influenciado por Poincaré e Lyapunov, suas pesquisas possuem, no entanto, estilo próprio. Sobre a especificidade do ponto de vista qualitativo de Levi-Civita indicamos o importante trabalho de Dell'Aglio e Israel (DELL'AGLIO & ISRAEL, 1989). Este matemático italiano utiliza uma definição de estabilidade análoga à de Lyapunov, mas obtida independentemente. O que torna próximos os trabalhos do russo e do italiano é que ambos, em um primeiro momento, se servem diretamente da definição de estabilidade de Lagrange e da demonstração de Dirichlet para readaptá-los ao problema da estabilidade do equilíbrio de um fluido[16].

Antes do início do século XX já são originalmente empregados, em seus trabalhos, ferramentas como as seções de Poincaré e as transformações de pontos e é a partir destes métodos que ele analisa a estabilidade de soluções periódicas que serão importantes no problema restrito dos três corpos. Estes resultados estão resumidos em um artigo publicado em 1901, "*Sopra alcuni criteri di instabilità*" (LEVI-CIVITA, 1901), citado várias vezes por Birkhoff como também por Lattès em seus trabalhos sobre as transformações pontuais.

Ele demonstra então, usando o método de seções de Poincaré, que uma solução periódica é estável apenas se os expoentes característicos[17] são todos imaginários

[16]Dell'Aglio e Israel observam que Levi-Civita, em um dado momento, denomina sua condição de "*stabililità incondizionata alla Dirichlet*", e isto se deve ao fato de que, sua definição de estabilidade é obtida interpretando-se a definição clássica de equilíbrio estável em um espaço de configurações com uma representação geométrica, espaço que ele denominava "*spazio degli a tti di moto*".

[17]Lembremos que é considerada a transformação discreta.

puros. Esta conclusão é uma generalização, obtida por outros métodos, do resultado de Lyapunov que mencionamos na seção anterior.

Para o problema restrito dos três corpos, de que falaremos na seção seguinte, Levi-Civita conclui pela instabilidade, no sentido de que, partindo de uma solução periódica, as outras soluções, tomadas inicialmente tão próximas quanto se queira, terão uma distância maior que um valor dado, após um intervalo de tempo suficientemente grande[18].

Levi-Civita percebe que o teorema que ele acaba de obter está de acordo com a asserção de Poincaré de que a instabilidade é a regra e a estabilidade é a exceção, uma vez que a estabilidade depende de uma circunstância excepcional em que todos os números complexos são imaginários puros. Mas, para aceitar esta conclusão, já que do ponto de vista astronômico tudo parecia levar à pressuposição oposta, é preciso diferenciar a estabilidade natural e a estabilidade matemática:

"*Bisogna concluderne che la stabilitá naturale va intesa in un senso meno restrittivo*" (LEVI-CIVITA, 1901, p.4).

7.2.3 Uma nova visão sobre o problema da estabilidade do sistema solar

No afã de saber o que acontece com n corpos se atraindo mutuamente segundo a lei de atração universal, havia-se tentado aumentar a precisão das aproximações. Os métodos de aproximação podem ter sido úteis para as aplicações práticas, mas a questão da estabilidade possui um papel que ultrapassa a possibilidade de previsão:

"*Il ne s'agit pas seulement, en effet, de calculer les éphémerides des astres quelques années d'avance pour les besoins de la navigation ou pour que les astronomes puissent retrouver les petites planètes déjà connues. Le but final de la mécanique céleste est plus élevé; il s'agit de résoudre cette importante question: la loi de Newton peut-elle expliquer à elle seule tous les phénomènes astronomiques?*"(POINCARÉ, 1891, p.530).

Se a pergunta que atribui uma importância primordial à questão da estabilidade é a mesma para Poincaré e para seus antecessores, como Lagrange e Laplace, o que ele

[18]Na verdade Levi-Civita prova isto para o caso em que os movimentos médios dos três corpos são comensuráveis.

considera uma resposta satisfatória é algo bem distinto. Encerramos o capítulo anterior antes da consideração do problema da convergência matemática das séries que aproximam o movimento dos corpos celestes. A partir de Poincaré, a estabilidade deixa de ser um problema de aproximação para se tornar um problema matemático que diz respeito à convergência formal das séries. Estender a validade das aproximações não resolve o problema e Poincaré continua:

"*On peut donc prevoir le moment où les méthodes anciennes, malgré la perfection que leur a donnée Le Verrier, devront être abandonnées définitivements. Nous ne sérons pas pris au dépourvu*".

Isto porque, se não garantimos a convergência, qualquer que seja o método de aproximação, ele não pode nos fornecer uma aproximação infinita: o problema da estabilidade é mais um problema teórico do que um problema prático.

Visto a complexidade do problema geral dos n corpos, Poincaré irá se debruçar sobre o caso particular do problema dos três corpos. Bruns havia demonstrado que este problema não possuía outras integrais algébricas além das integrais clássicas e Poincaré demonstrou o mesmo resultado corrigindo algumas falhas em sua prova.

Passamos então a citar os trabalhos de Poincaré, que se tornaram clássicos, sobre a mecânica celeste: o artigo "*Sur les problèmes des trois corps et les équations de la Dynamique*" (POINCARÉ, 1890) e o livro *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (POINCARÉ, 1892-1899), publicados o primeiro em 1890 e o segundo, em três volumes, entre 1892 e 1899. Seus importantes resultados se referem, antes de tudo, à convergência das séries usadas anteriormente. Poincaré mostra que o problema dos três corpos não possui, além das integrais clássicas, nenhuma integral analítica e uniforme, o que tem por conseqüência o fato de que a maior parte das séries empregadas anteriormente para a integração do problema não convergem.

No desenvolvimento deste trabalho, Poincaré irá considerar, constantemente, o problema *restrito* dos três corpos[19], onde se enquadra, por exemplo, o sistema formado pelo Sol, pela Terra e pela Lua. Este é um caso particular do que chamamos hoje um sistema hamiltoniano em quatro dimensões que, por possuir uma função invariante

[19]Esta palavra é empregada pela primeira vez por Poincaré para designar o caso em que os dois corpos principais se movem em órbitas sem excentricidade enquanto o corpo perturbado possui massa desprezível.

representando a energia, pode ser modelado em um espaço de três dimensões (quando fixamos um valor para a energia).

Poincaré parte então de uma solução periódica para analisar as soluções em sua vizinhança. Com este objetivo, ele começa por estudar as superfícies que são assintóticas a esta solução periódica. Procura, portanto, encontrar as equações das superfícies assintóticas a uma solução periódica instável, que dependem de um certo parâmetro μ. O objetivo inicial de Poincaré será provar que as equações destas superfícies assintóticas podem ser representadas por séries infinitas convergentes, dependendo de $\sqrt{\mu}$.

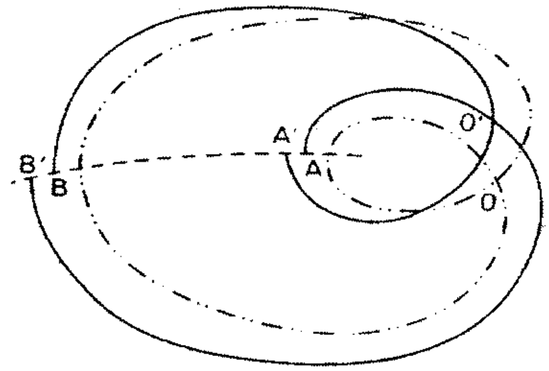
Insere-se neste ponto o motivo da controvérsia em torno do prêmio em homenagem ao rei Oscar II da Suécia e da Noruega. Em 1885 havia sido anunciado, pelos *Acta Mathematica*, um prêmio para aquele que conseguisse encontrar uma solução em série de potências, convergente, para o problema dos n corpos quando $n \geq 3$. Mesmo não tendo fornecido a resposta ao problema[20], o juri (composto por Mittag-Leffler, Hermite e Weierstrass) resolveu atribuir o prêmio a Poincaré, no início de 1889, pelas inovações que este havia introduzido no modo de tratar as questões da mecânica celeste.

Mas a versão do trabalho de Poincaré que ganhou efetivamente o prêmio, (POINCARÉ, 1889), continha um erro, justamente no que tange à convergência das séries encontradas para representar as superfícies assintóticas. A partir das propriedades que ele supunha ter encontrado para estas séries, a saber que elas eram convergentes para valores pequenos do parâmetro μ, passa-se à construção das superfícies assintóticas, a partir do método de seções que dá origem a um problema bidimensional[21]. As superfícies assintóticas, sobre a superfície de seção, são representadas por curvas como as da figura seguinte:

As curvas traçadas normalmente representam as interseções das superfícies assintóticas e O' é o ponto fixo que representa a solução periódica sobre a seção. A linha tracejada é uma curva fechada que representa uma superfície próxima de ambas as superfícies assintóticas. Esta curva possui uma auto-interseção em um ponto O e a distância entre O e O' é proporcional a μ. Baseado, então, nas conclusões equivocadas

[20] Na verdade constavam outras três questões, mas esta era a mais importante.

[21] É considerado um caso particular em que há uma superfície de seção global.



sobre a convergência das séries para μ pequeno, Poincaré conclui que a curva $BO'B'$ deveria ser uma curva fechada, o que implicaria que as superfícies assintóticas fossem fechadas e, conseqüentemente, a estabilidade[22].

Quando da preparação do artigo para a publicação, o editor assistente dos *Acta Mathematica* (Edvard Phragmén), coloca uma série de questões a Poincaré. Este acaba por perceber que é falsa a conclusão, que acabamos de mencionar, de que as superfícies assintóticas são fechadas, isto porque as séries não são convergentes, como ele supunha a princípio. Após o choque inicial e as devidas desculpas, Poincaré irá escrever um segundo artigo, com o mesmo título(POINCARÉ, 1890), onde estes erros são corrigidos.

O fato é que, não sendo as séries convergentes, não podemos garantir que as curvas $AO'B'$ e $A'O'B$ sejam fechadas, o que faz com que as curvas $O'B$ e $O'B'$ possam se interceptar. Se isto acontece, uma trajetória passando pelo ponto de interseção está em ambas as superfícies assintóticas e temos uma trajetória *duplamente assintótica*. Já comentamos, no quarto capítulo, a complicação que este tipo de trajetória representa para a dinâmica, inicialmente porque, como Poincaré mesmo demonstra, a existência de uma trajetória deste tipo implica a existência de infinitas outras. Cada uma destas trajetórias pertence simultaneamente à extensão do arco $O'B'$ e da extensão de $O'B$.

Na carta que ele escreve a Mittag-Leffler, desculpando-se pelo erro, lemos que:

"Eu havia pensado que **todas** estas curvas assintóticas, depois de terem se afastado de uma curva fechada representando uma solução periódica, se aproximariam assintoticamente da **mesma** curva fechada. O que é verdade é que há uma infinidade

[22] Para valores pequenos de μ, ele teria demonstrado que as soluções assintóticas, vizinhas a uma solução periódica instável, são estáveis uma vez que permanecem em uma certa região do espaço.

que gozam desta propriedade"[23].

Podemos imaginar, pela descrição abaixo apresentada em um artigo posterior, o efeito que podem ter estas soluções duplamente assintóticas, que seriam chamadas *homoclínicas* por Poincaré no terceiro volume de seu livro sobre a mecânica celeste:

"Enfim há uma infinidade de soluções *duplamente assintóticas*; aí está um ponto que eu tive muita dificuldade de estabelecer rigorosamente. Pode acontecer que o satélite L_2, a princípio muito próximo da órbita de L_1, se distancie muito inicialmente e se reaproxime indefinidamente em seguida. Em uma época remota, esta lua se encontrava sobre a superfície S' e descrevia sobre ela espirais se distanciando de C (curva fechada); ela em seguida se distanciou muito de C; mas, dentro de um tempo longo, ela se encontrará sobre a superfície S e descreverá novamente espirais se aproximando de C.

Sejam $L_2, L_3, ..., L_n$, $n-1$ luas descrevendo órbitas duplamente assintóticas; em uma época remota, estas $n-1$ luas se moviam segundo espirais sobre S'; percorrendo esta superfície; encontramos estas $n-1$ órbitas em uma certa ordem. Ao fim de um tempo muito longo, nossos satélites se encontrarão sobre S e descreverão de novo espirais; mas, percorrendo esta superfície S, encontraremos as órbitas das $n-1$ luas *em uma ordem totalmente diferente*. Este fato, por pouco que nos dediquemos a refletir sobre ele, parecerá uma prova explosiva da complexidade do problema dos três corpos e da impossibilidade de resolvê-lo com os instrumentos atuais da análise"(POINCARÉ, 1891, p.533-534).

No início do século XX, a natureza do problema da estabilidade torna-se ainda mais clara com a publicação dos trabalho de Karl Sundman que obtém, para quase todas as condições iniciais, uma solução para o problema dos três corpos como uma série na variável t que é convergente para todo t real. Estas séries se pareciam com aquelas que o próprio Poincaré havia encontrado, e que comentamos no primeiro capítulo, mas que, todavia, não eram válidas na presença de colisões. As de Sundman eliminam esta restrição, sendo séries que resolvem formalmente o problema. Por que então não se considerou o problema como resolvido?

[23] A carta original de Poincaré foi reproduzida no livro de June Barrow-Green *Poincaré and the Three Body Problem*(BARROW-GREEN, 1997). Indicamos este livro, bastante completo, que trata do tema e aborda o erro de Poincaré e as diferenças entre os dois artigos.

A resposta é que as séries de Sundman não nos permitem obter nenhuma informação qualitativa sobre o comportamento do sistema além de possuírem convergência excessivamente lenta para permitir experiências numéricas. Lembremos que a solução por séries convergentes encontradas pelo próprio Poincaré não eram consideradas "satisfatórias", o que não se devia ao fato de que estas séries fossem inválidas na presença de colisões, mas porque elas não forneciam dados qualitativos sobre as soluções. As séries obtidas por Sundman, bem como a sua generalização para o problema dos n corpos obtida em 1991, não oferecem teoricamente nenhuma informação a mais do que aquelas que já se conheciam sobre o problema dos três corpos e este ponto de vista está presente na pesquisa atual em mecânica celeste, como podemos atestar, por exemplo, pelos comentários de Florin Diacu (DIACU, 1996) e Alain Chenciner (CHENCINER, 1999).

Se afirmávamos, no início desta seção, que era preciso garantir a convergência das séries para resolver o problema da estabilidade, mostramos agora que esta condição não basta. Mesmo se temos séries convergentes, a questão da estabilidade continua sendo, até os nossos dias, motivadora de ricas pesquisas que envolvem a teoria dos sistemas dinâmicos e suas aplicações.

7.2.4 Uma crítica à definição de estabilidade empregada por Poincaré

Reafirmando o que dissemos anteriormente sobre a definição de estabilidade usada por Poincaré, a saber que ela leva em conta o conjunto de trajetórias, começamos por mencionar como esta definição é enunciada no primeiro volume de seu célebre livro, publicado em 1889, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*:

"Para que haja estabilidade completa no problema dos três corpos, são necessárias três condições:

1. Que nenhum dos três corpos possa se distanciar indefinidamente;
2. Que dois dos corpos não possam se chocar e que a distância entre estes dois corpos não possa diminuir abaixo de um certo limite;
3. Que o sistema venha passar uma infinidade de vezes tão perto quanto se queira da situação inicial.

Se apenas a terceira condição é satisfeita, sem que se saiba se as duas primeiras o são, eu direi que há somente *estabilidade de Poisson*"(POINCARÉ, 1892-1899, p.141).

Vemos que apenas a terceira condição é equivalente à *estabilidade de Poisson* e a denominação de "estabilidade" para esta propriedade, usada por Poincaré, é criticada por Birkhoff. Este observa ser mais conveniente denominar os movimentos gozando desta propriedade de "movimentos recorrentes", como os definimos no terceiro capítulo.

As definições de estabilidade propostas por Birkhoff são bastante numerosas e isto é justificado pelo seu ponto de vista de que:

"*The fundamental fact to observe here is that this concept is not in itself a definite one but is interpreted according to the question under consideration*"(BIRKHOFF, 1935).

Para cada pergunta, uma definição de estabilidade. Por exemplo, a *estabilidade formal de primeira ordem*, associada à exigência de que certos valores sejam imaginários puros (situação elíptica); e a *estabilidade trigonométrica ou completa*, que depende da existência de certas séries trigonométricas (análoga ao caso dos centros de Poincaré). Para o caso das "equações da dinâmica", o primeiro tipo de estabilidade implica o segundo, e Birkhoff demonstra que, sob certas restrições, um sistema dinâmico qualquer, que satisfaça estes dois tipos de estabilidade, pode ser reduzido, na vizinhança de um ponto de equilíbrio de tipo geral, a um sistema hamiltoniano. Um caso particular deste fato estava presente na "Teoria dos Centros" de Poincaré. Segundo Birkhoff, a importância atribuída às equações hamiltonianas é estreitamente ligada a questões sobre a estabilidade.

Poincaré havia reconhecido que estas equações possuem a propriedade de que, se uma posição de equilíbrio ou um movimento periódico satisfaz às condições de estabilidade de primeira ordem, também será satisfeita a condição de estabilidade completa. Birkhoff quer demonstrar a recíproca, para concluir que as equações hamiltonianas são significativas exatamente por serem equivalentes à estabilidade completa:

"*For these reasons there has been a disposition to attribute an almost mysterious significance to the Hamiltonian equations*"(BIRKHOFF, 1927b, p.1).

Existem, ainda segundo Birkhoff, dois tipos de estabilidade. A estabilidade de uma solução periódica, definida ao modo de Lyapunov, é a estabilidade qualitativa por excelência, enquanto a estabilidade formal que acabamos de citar é de outra natureza: um movimento periódico qualitativamente estável podendo não ser formalmente estável e vice-versa. No caso em que temos uma solução periódica elíptica, por exemplo, garantimos a estabilidade formal, mas neste mesmo caso, quando as famílias de curvas assintóticas são não-analíticas, não há estabilidade no sentido qualitativo.

O papel que tinham as soluções periódicas para Poincaré será atribuído, por Birkhoff, à noção de recorrência. No terceiro volume do livro *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Poincaré propõe seu famoso *teorema da recorrência*, que afirma que um sistema conservativo deve retornar infinitas vezes à vizinhança de sua configuração inicial com probabilidade absoluta. Isto significa que quase todas as suas soluções possuem estabilidade de Poisson, onde a expressão "quase todas" deve ser entendida no sentido probabilístico. Uma conseqüência disto é que, se Poincaré havia afirmado anteriormente que a instabilidade é a regra e a estabilidade a exceção, quando o sistema preserva volume, revertemos esta conclusão: do ponto de vista probabilístico, a estabilidade é a regra e a instabilidade a exceção.

Para um sistema dinâmico não tão específico quanto os conservativos, o objetivo de Birkhoff é demonstrar que há *movimentos centrais*, como definidos no terceiro capítulo, que possuem uma propriedade de recorrência regional[24] e para os quais os outros movimentos do sistema devem tender assintoticamente. Para um caso especial (sem singularidades) das equações da dinâmica, os movimentos centrais constituem a totalidade dos movimentos e isto leva Birkhoff a afirmar que "a utilidade superior das equações do tipo clássico pode muito bem ser um reflexo do fato de que os movimentos centrais são os movimentos mais prováveis, mais que qualquer conseqüência das leis da natureza".

A antítese da recorrência, na opinião de Birkhoff é a transitividade. Um sistema dinâmico é transitivo se podemos encontrar trajetórias deste sistema arbitrariamente próximas de qualquer estado em um certo instante, que passem posteriormente na vizinhança de qualquer outro estado. Isto quer dizer que a trajetória, por um certa condição inicial, irá se difundir em todo o domínio, como é o caso, por exemplo, das

[24] Observamos que não se tratam de movimentos recorrentes como definimos no terceiro capítulo mas de uma propriedade mais fraca.

geodésicas em uma superfície de curvatura negativa.

Se a recorrência não é a noção apropriada para a estabilidade, sua antítese, isto é, a transitividade, é a noção apropriada para a instabilidade, e isto na opinião do próprio Birkhoff. Podemos ter transitividade em um sub-conjunto, e Birkhoff observa que:

"É um problema pendente (*outstanding*) da dinâmica determinar o caráter dos domínios em que um dado sistema dinâmico é transitivo"(BIRKHOFF, 1920a, p.3).

Birkhoff tinha razão. A transitividade está associada à possibilidade de decomposição da dinâmica em conjuntos "básicos", que devem possuir esta propriedade[25].

***

Tendo resumido algumas das várias concepções de estabilidade no conjunto de trajetórias, passaremos a falar, no próximo capítulo, da estabilidade definida em um outro nível.

[25] Isto significa possuir uma órbita densa.

Capítulo 8

Passa-se a um outro nível: a estabilidade estrutural e a classificação dos sistemas dinâmicos

Falaremos de um outro *nível* onde o problema da estabilidade passará a ser colocado. Analisamos no capítulo anterior várias definições da estabilidade **no** conjunto de trajetórias e definiremos, neste capítulo, a estabilidade como uma propriedade **do** conjunto de trajetórias. Em suma, considerando-se o conjunto de trajetórias definido por um certo sistema, queremos saber se este conjunto é "estável" por uma perturbação do sistema e veremos exatamente o significado atribuído a este conceito, em um novo contexto.

8.1 O trabalho fundador dos soviéticos: a escola de Andronov sobre os osciladores não lineares

Não podemos deixar de perceber uma certa coincidência histórica entre o fato de que se impõem na União Soviética, ao mesmo tempo, pontos de vista especiais sobre a matemática e um sistema político distinto. Durante os anos 30, enquanto no Ocidente predominavam as visões formalistas, ou mesmo positivistas, sobre as matemáticas, na União Soviética, eram afirmadas outras motivações, mais voltadas para problemas práticos. Uma das explicações para isto poderia ser baseada nas concepções da dialética da natureza, na qual se inspirava o sistema soviético. Da irredutibilidade da dialética a qualquer demonstração apriorística, de caráter lógico-dedutivo, infere-se que as suas leis "são verdadeiras porque, ao atuarmos sobre a realidade, elas se verificam. Como o conhecimento da realidade é insuficiente, a formulação das leis da dialética nunca é definitiva"[1].

Segundo alguns trabalhos históricos, dentre os quais o artigo de Diner que citaremos mais tarde, é do repúdio a um certo idealismo burguês e do compromisso com o caráter dinâmico da realidade que foram fomentadas várias escolas de pesquisa aplicada, na União Soviética, durante as primeiras décadas do século XX. Independente da motivação ideológica, era um fato naquele país, em torno dos anos trinta, o especial interesse por problemas de origem aplicada. Podemos concluir isto a partir do testemunho de L. S. Pontryagin, que será um dos protagonistas de nossa história, ao relatar um momento especial de sua trajetória científica:

"A alegria com o sucesso no trabalho científico não poderia abafar uma ansiedade gradualmente crescente. (...) Esta ansiedade era intensificada pela opinião geral que se formava gradualmente nos círculos matemáticos da universidade. Muitas pessoas estavam dizendo que era preciso não se dedicar somente à matemática pura, sem considerar as aplicações. Em conversas com amigos eu também comecei a exprimir esta opinião. Um dia, então, creio que em 1932, um jovem físico chamado Aleksandr Aleksandrovich Andronov, que eu não conhecia até então, veio ao meu apartamento sem nenhum aviso. Ele me disse que tinha ouvido falar sobre meu desejo de trabalhar com problemas aplicados em matemática, e disse que queria me dizer algo. Foi através dele que eu ouvi pela primeira vez o que é um espaço de fases, o que são ciclos limite, e outras coisas assim. (...) Andronov não era apenas um eminente cientista, mas também uma pessoa extraordinária. Parecia que sua principal característica era um senso de responsabilidade por tudo que acontecia em nosso país. Meu conhecimento dele e sua influência sobre mim, colocaram meus interesses matemáticos em uma nova direção. Isto acabou por prevalecer e eu abandonei meu trabalho sobre problemas matemáticos abstratos"(PONTRYAGIN, 1978, p.12-13)[2].

Para falar de Andronov, a escola de física de L.I. Mandelshtam nos interessa

[1]Citamos um manuscrito sobre as leis da dialética da natureza, escrito por Lincoln Bicalho Roque, não publicado devido ao assassinato precoce do autor, meu pai, pela sangrenta ditadura militar brasileira.

[2]Pontryagin pontua ainda que esta atitude não foi bem vista inicialmente pelos matemáticos mais antigos. Os estudos que se seguiram sobre problemas aplicados, inspirados de Andronov, foram criticados inclusive por Kolmogorov que, contudo, passará a valorizá-los mais tarde.

em particular[3]. Mandelshtam defendia que a teoria das vibrações seria a linguagem comum da física, da qual um dos primeiros exemplos teria sido a teoria de Copérnico e seu caráter vibratório. Citando A.N. Whitehead, ele afirmava que o nascimento da física é ligado à aplicação da idéia abstrata de periodicidade aos fenômenos concretos. Sua escola tinha como motivação a constituição de um pensamento físico não-linear que, a partir de uma teoria matemática rigorosa, unificasse os fenômenos não-lineares. Desta escola faziam parte, entre outros, A.A. Andronov, A. A. Vitt e S.E. Khaikin.

Andronov irá se instalar, em seguida, em Gorki onde funda uma escola voltada para o estudo das oscilações não-lineares, em especial aquelas que são mantidas por uma fonte de energia não vibratória, denominadas auto-oscilações. Em 1929 ele publica seu trabalho final de curso que demonstra existir, para este tipo de sistema, um ciclo limite no espaço de fases[4]. Este trabalho partia da condição de que os movimentos periódicos devem ser estáveis sob variações suficientemente pequenas de certos parâmetros da definição do sistema, a fim de demonstrar que, nestes sistemas, apenas os ciclos limites podem representar fenômenos auto-oscilatórios reais.

Sob forte influência de Poincaré e Lyapunov, a escola de Gorki se dedica à teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos[5]. Andronov publicou, em 1933, um trabalho sobre bifurcações, mostrando a mudança qualitativa sofrida por um sistema dinâmico quando variamos alguns dos seus parâmetros. Por exemplo, um ciclo limite pode surgir da perturbação de um ponto de equilíbrio. Esta situação hoje é conhecida como *bifurcação de Hopf*, devido ao matemático alemão E.Hopf, cujo trabalho redescobre este fenômeno independentemente e o generaliza para dimensões maiores.

Como resultado da pesquisa na escola de Gorki, Andronov publica, em 1937, duas obras fundamentais. Um artigo, com Pontryagin, publicado em francês, intitulado "*Systèmes Grossiers*"(ANDRONOV & PONTRYAGIN, 1937) e o livro *Teoriya Kolebanii* (Teoria das Oscilações), escrito em russo com Vitt e Khaikin[6].

[3]Sobre uma história parcial das origens da Teoria dos Sistemas Dinâmicos na União Soviética, de onde tiramos as informações deste parágrafo, indicamos o artigo de Simon Diner *Les voies du chaos déterministe dans l'école russe*(DINER, 1992).

[4]A mesma situação já havia sido encontrada por Van der Pol em 1926(VAN DER POL, 1926). Andronov tinha conhecimento destes trabalhos, como podemos ver por uma nota publicada nos *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* no mesmo ano de 1929(ANDRONOV, 1929).

[5]Sobre os trabalhos de outros matemáticos desta escola e a influência do ponto de vista de Andronov, ver o artigo de Anosov(ANOSOV, 1986).

[6]Utilizamos uma tradução deste livro para o inglês(ANDRONOV *et al.*, 1966).

Pela clareza com que é exposto o ponto de vista epistemológico dos autores, abordaremos inicialmente o livro, para em seguida analisar os resultados matemáticos do artigo. Eles principiam por afirmar a diferença de natureza entre um sistema físico e o objeto matemático que o modela:

"Uma certa idealização do problema não pode ser evitada, com o objetivo de construir um modelo matemático do sistema físico"(ANDRONOV *et al.*, 1966, p.15).

No original em russo a palavra usada é "*modeli*" e cabe ressaltar que o uso da palavra *modelo* neste momento é surpreendente do ponto de vista histórico. Para uma análise das origens e mudanças de significado deste termo, indicamos os trabalhos de Martin Zerner (ZERNER, 1997) e (ZERNER, 1996b) que, no entanto, não mencionam os autores soviéticos aos quais nos dedicamos aqui[7].

Andronov, Vitt e Khaikin prosseguem a introdução da Teoria das Oscilações afirmando que todas as propriedades que atribuímos freqüentemente aos sistemas físicos são, de fato, propriedades das suas "idealizações". Não podemos falar de um sistema real que seja dissipativo ou conservativo, linear ou não-linear; estas propriedades pertencem a uma idealização de tal sistema. Mais precisamente, *uma idealização é constituída pelo modelo matemático obtido quando colocamos determinadas questões sobre o sistema físico.*

Desse modo, a idealização comporta a pergunta que fazemos sobre um sistema real. Uma mesma realidade física pode ser idealizada por um modelo linear ou não-linear, conservativo ou dissipativo, sendo estas propriedades idealizadas segundo a questão que colocarmos sobre o sistema real. Como será adotado o ponto de vista qualitativo, é preciso saber que questões são as mais significativas para esta abordagem.

Influenciados diretamente pelos trabalhos de Poincaré e Birkhoff, os autores partem da análise de certos movimentos especiais que permitem reduzir uma descrição em tempo infinito a uma análise em um intervalo de tempo finito: são em primeiro lugar os movimentos estacionários que lhes interessa. Este tipo de movimento terá um papel centralizador, ou organizador, na descrição dos movimentos que têm lugar em sua vizinhança. Este, como vimos, era o caso das soluções periódicas para Poincaré e dos movimentos recorrentes para Birkhoff.

[7]Agradecemos ao próprio Martin Zerner pela leitura conjunta da publicação original em russo do livro *Teoriya Kolebanii.*

O movimento estacionário será o estado limite para o qual um sistema deve tender assintoticamente. No caso em que temos apenas um grau de liberdade, estes movimentos são pontos de equilíbrio ou movimentos periódicos mas, para dimensões maiores, "uma definição matemática precisa dos movimentos estacionários pode ser feita identificando-os com os movimentos recorrentes de Birkhoff"(ANDRONOV *et al.*, 1966, p.27).

É importante ressaltar que a maioria dos objetos que aparecem no estudo qualitativo, tinha sido definida, até este momento, para o caso conservativo e uma das razões desse procedimento é a importância atribuída aos problemas da mecânica celeste. Pela própria natureza dos problemas focalizados pelos russos, oriundos de problemas de engenharia, várias noções são redefinidas para sistemas dissipativos[8].

Admitindo, como os soviéticos, que os modelos são idealizações, ocorre-nos uma pergunta natural: como garantir que as respostas que obtemos para os modelos nos fornecem informações efetivas sobre o sistema físico?

É preciso procurar as propriedades que devem ser impostas ao modelo para que possamos, a partir dele, obter uma resposta razoável para a pergunta que colocamos sobre o sistema físico (que deu origem a este modelo). Para Andronov e os co-autores do livro sobre as oscilações, os movimentos estacionários possuem um interesse especial, de modo que eles investigam as propriedades dos modelos que tornem as respostas as mais verossímeis possíveis, no que tange aos movimentos estacionários. É preciso, com este fim, se voltar para a própria natureza e escolher as propriedades essenciais, e reconhecíveis, dos movimentos estacionários. Ora, por definição, um movimento deste tipo permanece sobre si mesmo após um intervalo de tempo arbitrário, mesmo que ele seja submetido a perturbações aleatórias inevitáveis. No pior dos casos, uma perturbação deste tipo poderá transformá-lo em um movimento bastante próximo daquele que tínhamos anteriormente.

Do mesmo modo, para que as informações sobre um sistema físico sejam legítimas, mesmo obtidas a partir de soluções do modelo concebido para este sistema, suas soluções devem ser resistentes a perturbações[9]. Estas perturbações podem ter lugar

[8]Por exemplo, nestes problemas relativos às oscilações forçadas, temos movimentos periódicos em situações distintas daquelas que havíamos encontrado na mecânica celeste, como o é o caso dos ciclos limite, descobertos inicialmente por Van der Pol e, mais tarde, por Andronov.

[9]Esta exigência diz respeito também à possibilidade de verificação experimental. Comparando-se

em dois níveis, ou domínios, distintos: nas coordenadas dos movimentos definidos por um certo modelo; ou na própria definição do modelo. Os autores soviéticos afirmam enfaticamente que os aspectos do comportamento de um modelo que não resistem a tais perturbações não possuem nenhum interesse físico.

Tomando o modelo como uma equação diferencial, no primeiro caso trata-se de perturbações **de** trajetórias **no** conjunto de trajetórias. Por exemplo, uma solução periódica, considerada em si mesma (abstraindo-a do conjunto de trajetórias) é trivialmente estável, e a estabilidade de Poisson aproxima esta condição. Se levamos em conta que uma trajetória está imersa no conjunto de trajetórias, ela é estável, no sentido de Lyapunov, se, perturbando sua condição inicial, obtivermos uma outra trajetória que permaneça próxima da primeira por um intervalo de tempo arbitrário.

Mas dissemos que a perturbação pode se dar em um outro nível, isto é, no sistema diferencial propriamente dito. A pesquisa em sistemas dinâmicos até então fora inspirada principalmente pelos problemas da mecânica celeste, onde a configuração dos astros pode sofrer perturbações em virtude da atração de um outro astro. As perturbações só podem se dar, portanto, no domínio das soluções da equação, jamais sobre a forma da equação propriamente dita, sobretudo porque esta equação é derivada da lei de atração universal[10]. Tendo sido motivados por outro campo de aplicabilidade— as oscilações forçadas— a novidade do trabalho dos soviéticos será colocar o problema da estabilidade também no nível das equações:

"Para que os processos estacionários existam por longo tempo em um sistema real, eles devem ser estáveis não apenas com respeito a pequenas variações das coordenadas e das velocidades, mas também com respeito a pequenas variações na própria forma das equações diferenciais que descrevem o sistema"(ANDRONOV *et al.*, 1966, p.15).

Concretamente, quando se fala em preservar a forma das equações diferenciais, não significa que estejamos tratando de um problema algébrico, quer dizer, da forma como estas equações são escritas. Admitindo que esta forma possa variar, trata-se

as respostas fornecidas pela análise do modelo com os resultados de um experimento, podemos julgar se a idealização é legítima. Para isto é preciso que o modelo resista a pequenas perturbações uma vez que as propriedades físicas do experimento não podem ser reproduzidas exatamente.

[10]É importante salientar que, uma vez que esta equação depende de parâmetros, (como o próprio Poincaré já havia colocado) a questão é saber que alterações qualitativas a variação destes parâmetros pode ocasionar. Nada comparável, no entanto, à generalidade com que a questão da variação da forma das equações foi colocada por Andronov e seus colegas.

de um problema relacionado ao conjunto de soluções da equação diferencial. Uma variação da equação, ou seja, uma perturbação **do** conjunto de trajetórias definido por esta equação, não deve alterar significativamente o aspecto global deste conjunto.

Dito isto, devemos ainda investigar o que quer dizer "não alterar significativamente". Na estabilidade de uma trajetória, com a definição de Lyapunov por exemplo, esta expressão significa "estar próximo", literalmente. Mas como dizer que, após uma perturbação, o conjunto de trajetórias obtido se mantém "parecido" com o original?

Para responder a esta pergunta, será empregada a noção de homeomorfismo, ou, mais especificamente, de conjugação, da qual já falamos ao analisarmos o problema da linearização no segundo capítulo. Mais do que "parecidos", dissemos nesta ocasião que dois conjuntos de trajetórias são "equivalentes" quando podem ser transformados um no outro por um homeomorfismo que leva cada trajetória de um conjunto em uma trajetória do outro[11]. Veremos, em seguida, como isto foi proposto inicialmente por Andronov e Pontryagin no artigo publicado no mesmo ano de 1937.

Os autores trabalham com o sistema perturbado:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = Q(x,y) + q(x,y) \end{cases}$$

onde P, Q, p e q são todas funções analíticas de x e y.

Diz-se que um sistema é "*grossier*" (por oposição a um sistema "*non grossier*") em uma região G se, qualquer que seja η, existe ϵ tal que, para todas as funções p e q possuindo (bem como suas primeiras derivadas) módulo menor que ϵ, existe uma transformação biunívoca e bicontinua de G nela mesma, satisfazendo:

(i) nesta região, os pontos transformados estão a uma distância menor que η dos pontos originais;

(ii) os pontos de uma mesma trajetória do sistema não perturbado correspondem a uma mesma trajetória do sistema perturbado.

Esta definição equivale a dizer que transformamos o conjunto de trajetórias em G

[11] Em particular, esta transformação preserva a orientação das trajetórias e não altera a estrutura do espaço.

por um homeomorfismo, mas também que este homeomorfismo é próximo da identidade[12]. Um sistema é "*grossier*" se uma perturbação na definição do sistema mantém suas trajetórias, a menos de um homeomorfismo. Ou seja, o aspecto topológico do conjunto de trajetórias não se altera. Cabe lembrar que os trabalhos de Pontryagin, anteriores ao encontro com Andronov, eram dedicados à topologia, e ele sabia perfeitamente as restrições que a utilização de uma transformação com mais estrutura poderia impor ao problema.

Ainda no artigo de 1937, os autores observam em seguida que esta definição da "*grossièreté*" de um sistema pode ser considerada como a definição da estabilidade de um conjunto de trajetórias de um sistema dinâmico em relação a variações suficientemente pequenas da definição do sistema. Usando o artigo de Bendixson, que citamos anteriormente, mais especificamente, o resultado que conhecemos hoje como *Teorema de Poincaré-Bendixson*, e o conceito de estabilidade de Lyapunov, Andronov e Pontryagin enunciam que propriedades um sistema plano deve satisfazer para ser "*grossier*".

Enunciaremos posteriormente estas condições, mas ressaltamos, neste momento, que o adjetivo "*grossier*", que poderíamos traduzir literalmente por "grosseiro", corresponde, no dizer dos próprios autores, à situação em que a "estrutura qualitativa" do conjunto de trajetórias do sistema não é alterada por perturbações. Esta observação provavelmente inspirou a denominação que será mais tarde empregada para a *grossièreté* de um sistema pois, como veremos na seção seguinte, esta propriedade será chamada de *estabilidade estrutural*.

A definição de estabilidade estrutural proposta pelos autores soviéticos prima pela simplicidade e pela facilidade com que pode ser estendida a dimensões superiores. É interessante notar que esta definição pode parecer natural atualmente, mas que no processo histórico ela significou uma inovação importante. Em se tratando de novas definições em matemática, este não é um caso isolado pois, em muitos exemplos, uma vez estabelecidas, as definições matemáticas importantes adquirem a propriedade de soar como eternas.

[12] Na verdade, C_0-próximo.

Todavia, comentávamos, no segundo capítulo, que a equivalência via homeomorfismo é também uma escolha das propriedades consideradas importantes de se preservar. Voltaremos a falar de como a exigência da *grossièreté* de um sistema, no domínio dos sistemas, pode ser entendida a partir da necessidade de classificação, tal como a definimos naquele capítulo. Se quisermos construir uma classificação razoável, que não contenha excessivas classes, os elementos de cada classe não devem ser *finos* ao ponto de se tornarem patológicos, ou seja, uma perturbação do sistema deve deixá-lo na mesma classe.

8.2 A formalização da estabilidade estrutural e a difusão deste conceito no Ocidente

A introdução dos trabalhos dos autores soviéticos nos Estados Unidos, deveu-se sobretudo a Solomon Lefschetz, que deixou a Russia muito cedo, tendo passado pela França e se instalado nos Estados Unidos no início do século, onde seguiu uma longa carreira em matemática pura, na universidade de Princeton. Ainda antes da Segunda Guerra Mundial, Lefschetz já conhecia e admirava os trabalhos de Pontryagin em topologia, chegando, nesta época, a considerá-lo um dos maiores topólogos do mundo[13]. Por motivos distintos daquele que mais tarde se tornou seu amigo, Lefschetz também iria mudar as orientações de sua pesquisa.

Os esforços de guerra americanos levam Lefschetz a renovar seus interesses pelas áreas aplicadas à engenharia, em particular as equações diferenciais não lineares[14]. Lefschetz passa a ser consultor do *Office of Naval Research* e, a partir de um relatório feito por Minorsky, para este órgão, durante a guerra, dedica-se à análise qualitativa das equações diferenciais desenvolvida na União Soviética. A primeira tradução para o inglês do livro Teoria das Oscilações aparece em 1949 sob a direção de Lefschetz(ANDRONOV *et al.*, 1949), no entanto, esta tradução exclui a introdução que citamos na seção anterior, onde os autores soviéticos justificavam a importância de

[13]Ver conferência proferida por E. F. Mishchenko na conferência internacional realizada em Moscou em 1998, para celebrar os 90 anos de nascimento de Pontryagin(MISHCHENKO, 1999).

[14]Tais informações sobre o papel de Lefschetz no desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos nos EUA foram tiradas do artigo de Amy-Dahan Dalmedico, *La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la Deuxième Guerre Mondiale: l'action de Solomon Lefschetz* (DAHAN DALMEDICO, 1994).

um sistema ser resistente a perturbações. Mas deve-se ao próprio Lefschetz o fato de que a propriedade de *"grossièreté"* de um sistema seja, mais tarde, denominada *estabilidade estrutural* (*"structural stability"*).

Sob orientação de Lefschetz, em 1952, seu aluno De Baggis retoma alguns aspectos do artigo de Andronov e Pontryagin. Em 1937, eram considerados sistemas com um *ciclo sem contato*, como definido por Poincaré, que delimita uma região[15] G de $\mathbb{R}^2$. Pela definição de um *ciclo sem contato*, as trajetórias do sistema plano devem atravessar transversalmente a fronteira da região G. Os autores começavam por enunciar que uma primeira condição necessária para a estabilidade estrutural era que as singularidades e as soluções periódicas fossem hiperbólicas[16]. Afirmavam, em seguida, como uma segunda condição necessária, que não devia existir uma separatriz ligando duas singularidades de tipo colo[17]. Citando o artigo de Bendixson, usavam a classificação dos tipos de trajetórias de um sistema plano com singularidades isoladas (conhecida hoje por *Teorema de Poincaré-Bendixson*) e a noção de estabilidade de Lyapunov para justificar serem estas condições necessárias e suficientes para a estabilidade estrutural, sem proceder a uma demonstração.

De Baggis demonstra, então, que as condições de Andronov e Pontryagin caracterizam os sistemas estruturalmente estáveis no disco em $\mathbb{R}^2$. Inicialmente considerava-se que o sistema diferencial era definido por um campo de vetores analítico; a nova demonstração supõe apenas que o campo[18] é C^1. A citação abaixo mostra que o ponto de vista de Andronov, e dos outros pesquisadores soviéticos que escreveram com ele, foi difundido entre os alunos de Lefschetz:

"For physical systems to perform certain operations they must, if they are to be useful, posses a certain degree of stability. (...) The stability requirements of experiments provide a clue to the restrictions a mathematician should place on his nonlinear problems. (...) The "essential features" of systems to be preserved under small perturbations are described mathematically by the topological character of the phase

[15]Na nomenclatura atual esta região é o disco D^2.

[16]Notamos que esta nomenclatura não era empregada.

[17]Mencionamos, no terceiro capítulo, o modo como Bendixson havia repartido o domínio em regiões "nodais", a partir destas separatrizes.

[18]A condição de ser C^1 é a melhor que podemos esperar pois, se for C^0, nenhum sistema dinâmico com singularidade poderá ser estruturalmente estável, condição forte demais para o tipo de fenômenos que queremos estudar.

portrait"(DE BAGGIS, 1952, p.37).

Maurício Peixoto, matemático brasileiro que também trabalhou com Lefschetz em Princeton, publica, em 1959, um artigo de grande importância histórica chamado "*On Structural Stability*"(PEIXOTO, 1959). Neste trabalho, é apresentada uma definição da estabilidade estrutural um pouco distinta daquela que fora proposta por Andronov e Pontryagin, que será generalizada para sistemas em dimensão qualquer. Foi através do trabalho de De Baggis, que Peixoto tomou contato com o problema da estabilidade estrutural[19], despertando seu interesse para ir a Princeton, em 1957. Em meados do século XX, por inspiração do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, predominava, na matemática, a tentativa de classificação de seus objetos, com ênfase em suas estruturas e na definição de relações de equivalência entre eles. Esta preferência deixava à margem as pesquisas sobre as equações diferenciais, inclusive as realizadas por Poincaré. Desse modo, o matemático brasileiro intuiu que faltava expressar esta teoria em bases da Teoria dos Conjuntos, e a noção de estabilidade estrutural seria o primeiro passo para esta nova formulação.

Ao falar de uma singularidade de tipo centro, desde o início de seu artigo "*Sur les courbes...*", Poincaré dizia que os centros não apareceriam se os polinômios fossem "os mais gerais de seu grau". Vimos, no capítulo anterior, que Poincaré possuía intuições profundas a respeito da excepcionalidade dos centros no que hoje sabemos ser a variedade dos sistemas. No entanto, não se tinha ainda associado uma estrutura topológica ao conjunto das equações diferenciais. A importância da classificação das equações diferenciais não passou despercebida a Poincaré, como o próprio Peixoto menciona. Contudo, a matemática ainda não oferecia as ferramentas para que esta motivação fosse expressa em bases rigorosas.

Peixoto afirma que, ao partir para Princeton, estava convencido de que, para se aprofundar nos resultados propostos por Andronov e Pontryagin, era preciso adotar o ponto de vista dos espaços funcionais. Chegando aos Estados Unidos, ao explicar, em um seminário, como isto deveria ser feito, Lefschetz reagiu, observando que, a partir dali, poder-se-ia colocar todo tipo de questão sobre a estabilidade estrutural.

[19]As informações deste parágrafo seguem o testemunho do próprio Maurício Peixoto em entrevista à autora(PEIXOTO, 2000), bem como as fornecidas em uma conferência sua realizada na China em 1987(PEIXOTO, 1987).

O matemático brasileiro passa a tratar o problema no espaço funcional dos sistemas dinâmicos de classe C^1. Em um primeiro momento, ele considera os sistemas tal como definidos pelos soviéticos, ou seja, definidos em D^2, entrando transversalmente em sua fronteira e demonstra ser desnecessária a condição (i), exigida no artigo de Andronov e Pontryagin, de que o homeomorfismo fosse próximo da identidade. A estabilidade estrutural é definida apenas com a existência de um homeomorfismo que leve trajetórias do sistema nas trajetórias do sistema perturbado e, ainda no mesmo artigo, a definição será estendida para um disco n-dimensional. Com a nova definição, o sub-conjunto dos sistemas estruturalmente estáveis é aberto no conjunto dos sistemas dinâmicos.

Estabelecia-se, deste modo, o espaço dos sistemas dinâmicos (definidos no disco) e uma relação de equivalência neste espaço (equivalência topológica). Seguindo os objetivos do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, restava, portanto, o problema da classificação, ou seja, descrever as classes de equivalência no espaço dos sistemas, no interior das quais todos os sistemas seriam estruturalmente estáveis[20]. Veremos, no entanto, que este problema é, em geral, intratável, mas que um primeiro passo está na verificação da densidade dos sistemas estruturalmente estáveis.

No universo dos sistemas definidos no disco bidimensional, como no artigo dos soviéticos, Peixoto demonstra então que sistemas estruturalmente estáveis são densos. Isto quer dizer que, dado um sistema qualquer neste espaço, há, em sua vizinhança, um sistema estruturalmente estável. Segundo o ponto de vista exposto na primeira seção, o sistema ser estruturalmente estável é uma condição de possibilidade de que ele possa constituir o modelo de um sistema físico. A densidade é, neste sentido, a propriedade que garante que esta condição é factível pois, se partimos de um sistema que não é estruturalmente estável, é possível perturbá-lo para obter um outro que possua esta propriedade e restabeleça a condição de modelização.

Em 1958, Peixoto é apresentado a Steve Smale, que viria a ser um dos personagens principais no desenvolvimento da teoria. Quando Peixoto comunica seus resultados a Smale, este sugere imediatamente que eles sejam generalizados para sistemas definidos

[20]O problema que tratamos no segundo capítulo é um caso muito particular deste. Sobre os teoremas que, em contextos diversos, podem ser vistos como teoremas de estabilidade estrutural, ver (CHAPERON, 1999).

na esfera. A partir daí, Peixoto irá se dedicar aos sistemas definidos em uma variedade compacta bidimensional qualquer, enquanto o próprio Smale buscará formular uma generalização para dimensão qualquer.

Sob tal inspiração, Peixoto publica um outro artigo em 1962(PEIXOTO, 1962). Usando a topologia C^1, o espaço dos fluxos definidos em uma variedade será um espaço de Banach β se o sistema é definido em uma variedade compacta. O autor investiga como o subconjunto Σ dos sistemas estruturalmente estáveis está mergulhado em β, demonstrando, por exemplo, para dimensão qualquer, que Σ é um cone com uma quantidade enumerável de componentes conexas[21].

Voltando-se novamente para o caso bidimensional[22], Peixoto prova que as condições de Andronov e Pontryagin caracterizam completamente os sistemas estruturalmente estáveis. Estas condições são: toda trajetória tende para uma singularidade ou para uma trajetória fechada, sendo que tais trajetórias são hiperbólicas e em número finito; e não há trajetórias (separatrizes) conectando dois pontos de sela. Além disso, os estruturalmente estáveis formam um conjunto aberto e denso no universo dos sistemas e Peixoto declara que eles são "genéricos".

Dissemos que os autores soviéticos analisavam uma situação em que o Teorema de Poincaré-Bendixson podia ser aplicado e que este classificava o comportamento de todas as trajetórias. Mas sabemos que este teorema só vale para sistemas definidos na esfera cujas singularidades são isoladas, e a ausência de classificação pode complicar consideravelmente o problema. Quais serão os conjuntos limites possíveis para onde as trajetórias tendem?

Como dizia Birkhoff, as trajetórias em geral, não recorrentes, devem tender para conjuntos que possuem algum tipo de "recorrência". Estes conjuntos limites são compostos de movimentos não-errantes, ou, em um caso particular, de movimentos recorrentes, "quase" periódicos[23]. Podemos dizer então, grosso modo, que para saber

[21] Tal resultado decorre do teorema de aproximação de Weierstrass. Como o conjunto dos sistemas definidos por polinômios com coeficientes racionais é denso em Σ, conclui-se que em cada componente conexa devemos ter um representante deste tipo de sistema. Se as componentes conexas fossem não enumeráveis, existiria alguma componente não contendo nenhum sistema definido por polinômios deste tipo.

[22] Desta vez com a topologia C^r.

[23] Equivalente às trajetórias que possuem estabilidade de Poisson.

se os conjuntos limites compostos de trajetórias periódicas são densos, devemos investigar se, ao se perturbar um movimento recorrente, podemos "fechá-lo", gerando uma trajetória periódica. A este problema se refere um resultado muito importante da teoria, chamado "*Closing Lemma*". Problema introduzido, mas não é demonstrado, no artigo de Peixoto que acabamos de citar. De fato, o autor se serve de um resultado um pouco mais fraco que ele crê bastar para demonstrar seu teorema principal sobre a densidade. No entanto, percebeu-se mais tarde que seu resultado não valia para superfícies não-orientáveis[24].

Nos casos em que a densidade é demonstrada, isto é, para fluxos em variedades compactas bidimensionais orientáveis, temos um quadro global do comportamento dos sistemas bastante satisfatório. Isto por dois motivos: porque os estruturalmente estáveis são bem caracterizados pelas condições de Andronov e Pontryagin; e porque sendo densos, podem aproximar qualquer sistema.

Quanto ao problema de classificação, se ele era intratável no espaço de todos os sistemas, ele se torna bem mais viável no sub-conjunto dos estruturalmente estáveis. Este sub-conjunto sendo aberto e denso, podemos dizer que ele é "grande" no espaço de todos os sistemas ou, em um certo sentido, que "quase todos" os sistemas são tratáveis[25]. Como diz Peixoto, e esta seja talvez uma nomenclatura mais apropriada, um sub-conjunto aberto e denso é "genérico" no universo onde ele habita.

Temos um resultado forte de caracterização para a situação bidimensional; resta saber o que acontece para dimensão qualquer. Este será o ponto de partida dos famosos trabalhos de Smale, relacionados a novas caracterizações e conjecturas de "genericidade".

8.3 A noção de genericidade e o problema da classificação

Inicia como se segue a seção sobre as equações diferenciais do artigo de Poincaré, "*L'Avenir des mathématiques*", apresentado no Congresso Internacional de Roma,

[24] Charles Pugh, o mesmo matemático que comunicou este erro a Peixoto, demonstrou o *Closing Lemma* na topologia C^1. Para a topologia C^r, no entanto, o problema ficou em aberto.

[25] Veremos, mais adiante, que a densidade indica o tamanho de um conjunto em um sentido muito particular.

em 1908:

"*On a déjà beaucoup fait pour les équations différentielles linéaires et il ne reste qu'à parfaire ce qui est commencé. Mais en ce qui concerne les équations différentielles non linéaires, on est beaucoup moins avancé. L'espoir d'une intégration à l'aide des fonctions connues est perdu depuis longtemps; il faut donc étudier pour elles-mêmes les fonctions définies par ces équations différentielles et d'abord tenter une classification systématique de ces fonctions; (...) nous ne serons satisfaits que quand on aura trouvé un certain groupe de transformations (par exemple de transformations de Cremona) qui jouera par rapport aux équations différentielles le même rôle que le groupe des transformations birationnelles pour les courbes algébriques. Nous pourrons alors ranger dans une même classe toutes les transformées d'une même équation*"(POINCARÉ, 1908a, p.162).

O espaço de fase na vizinhança das singularidades, como vimos no segundo capítulo, pôde ser resolvido aproximadamente do modo enunciado por Poincaré. Enfraquecendo-se as exigências estruturais sobre o conjunto de transformações que eram, no caso geral, homeomorfismos, ou então difeomorfismos, para as contrações[26]. O problema global, no entanto, é muito mais difícil. Mesmo se considerarmos o espaço de fase de um sistema dinâmico globalmente em uma variedade, já teremos complicações suficientes se esta variedade tiver dimensão um, como é o caso dos difeomorfismos do círculo.

Uma das etapas da classificação, também à semelhança do que dissemos no segundo capítulo, é a demonstração de um teorema de conjugação. Na seção anterior, descrevemos como isto pode ser simplificado, no caso global bidimensional, se tivermos um teorema de conjugação para um sub-conjunto genérico, que nos permita classificar apenas este sub-conjunto. Mesmos se não tivermos uma classificação como a das curvas algébricas, para o problema global em dimensão qualquer, como queria Poincaré, a Geometria Algébrica fornecerá uma pista para a simplificação do problema: a genericidade.

[26]Lidávamos, neste momento, com grupos formados por germes de transformações, isto é, transformações que deixam a origem fixa e se equivalem na vizinhança da origem.

Para falar das origens da noção de genericidade devemos começar citando a Geometria Algébrica, originada na Itália do século XIX. Nesta teoria, o objetivo associado à noção de "genericidade" era o de agrupar objetos a menos de certos objetos excepcionais, que poderiam ser descartados. Uma propriedade é dita genérica se ela é verdadeira para quase todos os pontos de um conjunto, à exceção de um sub-conjunto algébrico *verdadeiro*[27].

Para estruturas diferenciais, uma das primeiras ocorrências desta noção de genericidade é encontrada em um trabalho de Whitney, de 1955, sobre as singularidades de aplicações do plano no plano(WHITNEY, 1955). O adjetivo " genérico" não era empregado neste trabalho, mas nele Whitney definia uma aplicação "excelente", mostrando ainda que, em um espaço funcional, toda aplicação podia ser aproximada por uma aplicação "excelente". Estudando as singularidades das funções diferenciáveis, René Thom irá retomar os trabalhos de Whitney, afirmando que seu resultado de aproximação pode ser entendido como uma transposição à Geometria Diferencial da propriedade de genericidade da Geometria Algébrica[28]. O espaço em questão passa a ser um espaço funcional que é um espaço de Baire, onde os sub-conjuntos excepcionais são sub-espaços fechados sem ponto interior. Em 1956[29], Thom propõe que se caracterize as funções excelentes a partir de suas singularidades, ou seja, que se descreva um certo conjunto de singularidades tal que as aplicações que possuam tais singularidades sejam genéricas.

A partir deste momento, as ligações entre os matemáticos que citamos se estabelecem muito rapidamente, e faremos um breve relato sobre o assunto. No mesmo ano de 1956, acontece, no México, um congresso internacional, onde Smale, que acabava de defender sua tese, conhece René Thom[30]. Depois será a vez de Peixoto, que ele conhecerá em Princeton dois anos mais tarde, e, segundo testemunho do próprio Smale, é a partir deste encontro que ele irá se interessar pelos problemas da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Cabe notar que, mesmo tendo demonstrado um resultado

[27]Um subconjunto algébrico é verdadeiro se ele é magro no conjunto original.

[28]Thom esteve em Princeton durante os anos 1951 e 1952 onde, a partir de conversas com Claude Chevalley, percebe que o conceito de genericidade era essencial para o seu ponto de vista, e que poderia ser estendido para as estruturas diferenciais.

[29]Ver (THOM, 1955-1956) e (THOM, 1956b).

[30]Na mesma ocasião ele é apresentado ao matemático brasileiro Elon Lages Lima, que, por sua vez, o apresentará também a Peixoto.

de densidade em seu artigo de 1958, Peixoto ainda não usava o termo "genericidade". No início de 1960, Smale se encontra no Rio de Janeiro onde trabalha com Peixoto, fazendo-o entrar em contato com os trabalhos de Thom. Em 1961, francês será convidado para vir ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e o modo como Peixoto reescreve o problema, já então denominado "genericidade", em 1962 é influenciado por Thom[31]. É interessante notar que, apesar de ter discutido vários pontos de seu artigo de 1958 com Whitney, só mais tarde Peixoto toma consciência de que aquele matemático, em 1955, já havia demonstrado o resultado sobre as aplicações do plano no plano que, na nova linguagem, queria dizer que as aplicações estruturalmente estáveis constituiam um sub-conjunto aberto e denso no espaço formado por estas aplicações.

Após o primeiro encontro com Peixoto, como dissemos, Smale se dedicará a estender seu resultado para dimensões superiores; para isto, sua experiência anterior em Topologia o deixava muito otimista . Dedicaremos uma seção especial a esta generalização e aos objetos inesperados dela provenientes.

A colaboração entre os matemáticos citados se prolongará pelos anos 60. Em 1964, Thom chega ao *Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHES) e convida Peixoto para uma série de conferências nesta instituição; a relação com Smale também prossegue e o parentesco da Teoria das Singularidades com a Teoria dos Sistemas Dinâmicos torna-se evidente. Sobre as interações entre diversas escolas que se deram no IHES nesse período, indicamos a tese de David Aubin *A Cultural History of Catastrophes and Chaos: around the "Institut des Hautes Études Scientifiques", France.* Neste momento Thom começa a trabalhar no que viria a constituir seu famoso livro *Stabilité structurelle et morphogenèse*, do qual um primeiro manuscrito data de 1966 e a primeira publicação de 1972(THOM, 1972)[32]. Nestes trabalhos de René Thom, sente-se claramente a influência das proposições de Smale. Em uma nota de 1966 (THOM, 1968), o matemático francês afirma que, se a ciência quiser aplicar ferramentas diferenciais para descrever os fenômenos naturais, ela não poderá ignorar a estrutura dos atratores de um sistema dinâmico estruturalmente estável, uma vez que

[31]O artigo de Peixoto(PEIXOTO, 1962) foi publicado na revista *Topology*, da qual Thom era editor.

[32]Tivemos notícia deste manuscrito pela tese de Aubin que acabamos de citar.

todo "estado físico"[33] que apresenta uma certa permanência, é necessariamente representado por um atrator deste tipo. Esta será uma das teses de Thom em seu livro, onde postula que o conjunto fechado onde os objetos são excepcionais, que representam uma descontinuidade de um processo, constituem a *morfologia* deste processo. Uma forma, se ela possui uma certa permanência, deve ser estruturalmente estável; e os pontos onde ela deixa de sê-lo interessam à Teoria das Catástrofes. Estes pontos formam conjuntos excepcionais no caso em que temos algum tipo de genericidade da estabilidade estrutural. Na edição de 1972, Thom propõe, em seu livro, que o termo "genericidade" seja usado no sentido que havia sido proposto por Smale(SMALE, 1967):

"L'adjectif "générique" a été employé en Mathématique dans tant d'acceptions différentes qu'il est probablement déraisonnable d'en vouloir restreindre l'usage dans le cadre d'une théorie formalisée. On peut souhaiter que la suggestion récente de Smale finisse par s'imposer; selon Smale on devrait réserver le qualificatif générique *aux propriétés des éléments d'un espace topologique E, sans jamais l'appliquer aux éléments de cet espace; une propriété P des points d'un espace E est dite générique si l'ensemble des points qui présentent la propriété P est dense dans E. En attendant, il appartiendra au mathématicien, s'il lui arrive d'user ce terme, d'en préciser la signification locale et de s'y tenir jusqu'à nouvel avis"*(THOM, 1972, p53).

8.3.1 Uma primeira tentativa de descrever o que acontece em dimensões maiores que dois

Mais uma vez, iniciaremos falando de Poincaré: lembrando-nos, mais precisamente, do seu resultado, já comentado no terceiro capítulo, que afirma ser a relação entre os números de singularidades de diferentes tipos determinada pela topologia da superfície onde o campo de vetores está definido. Estudando o número de pontos críticos de funções diferenciáveis, Marston Morse havia estabelecido uma série de desigualdades que, do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, podem ser vistas como um caso especial em que o campo é gradiente. Em um artigo publicado em 1960, Smale generaliza este resultado, obtendo desigualdades que associam o número de trajetórias periódicas de diferentes tipos com a homologia da variedade onde o sistema dinâmico

[33]Grifo de Thom.

está definido(SMALE, 1960a). Desse modo, Smale, neste trabalho, vê-se motivado a definir sistemas dinâmicos com características especiais, análogas àquelas que haviam sido propostas por Andronov e Pontryagin em dimensão dois. Trata-se de uma classe de sistemas em que todas as trajetórias tendem para trajetórias periódicas que são hiperbólicas e em número finito. Além disso, as variedades invariantes estáveis e instáveis destas trajetórias devem interceptar-se transversalmente.

Sistemas desse tipo foram denominados Morse-Smale, por Thom. Observamos a influência da teoria da transversalidade, desenvolvida pelo próprio Thom, sobre a definição de Smale que consiste em dizer que a condição enunciada pelos soviéticos, de que não há ligação de pontos de sela, pode ser generalizada, em dimensões maiores, dizendo que as variedades invariantes se interceptam transversalmente.

Mas Smale irá mais longe. Ainda no mesmo artigo ele conjectura se estes sistemas não seriam, então, "quase todos" os sistemas dinâmicos. Isto é, o sub-conjunto dos sistemas, que viriam a ser chamados Morse-Smale, seria aberto— como cada um dos seus elementos seria estruturalmente estável— e denso no conjunto de todos os sistemas dinâmicos.

Uma classificação satisfatória dos sistemas dinâmicos, a exemplo do resultado de Peixoto, exige três procedimentos:

(i) uma caracterização de um certo tipo de sistema;

(ii) a demonstração de que os sistemas deste tipo são robustos;

(iii) a demonstração de que o sub-conjunto de sistemas deste tipo é genérico no conjunto de todos os sistemas.

A "robustez" é traduzida matematicamente, neste momento, pela estabilidade estrutural, e a "genericidade" pela densidade[34]. A caracterização é então uma espécie de protótipo para o comportamento de "quase todos" os sistemas. Nestes termos, a conjectura de Smale significa propor que os Morse-Smale são "quase todos" os sistemas.

Jacob Palis demonstra, como resultado de sua tese, que os sistemas Morse-Smale

[34] Abertura e densidade, inicialmente.

são estruturalmente estáveis em dimensões baixas e, em seguida, generaliza este resultado, com Smale, para dimensão qualquer: (PALIS, 1969a) e (PALIS & SMALE, 1970). Uma das exigências da classificação é, deste modo, bem resolvida. Isto foi demonstrado alguns anos mais tarde e o maior empecilho à sua conjectura, que foi imediatamente notado, referia-se à densidade dos sistemas propostos por Smale.

Insere-se aqui, novamente, a questão das trajetórias homoclínicas, fonte de um erro no artigo premiado de Poincaré: as variedades invariantes (estável e instável) de um ponto fixo podem voltar a se interceptar em um outro ponto chamado *homoclínico*. Já falamos da complexidade das interseções das variedades estáveis e instáveis na presença de um ponto homoclínico transversal. Segundo a demonstração de Birkhoff, já mencionada no quarto capítulo, existem, na "vizinhança estendida" do ponto homoclínico, infinitos pontos periódicos. Lembrando que este comportamento tem lugar na seção de Poincaré, isto significa que, na vizinhança de uma solução periódica do sistema tridimensional que esta sendo considerado por Birkhoff, existem infinitas soluções periódicas. Smale, entretanto, não tinha conhecimento destes trabalhos e eles constituem, mais uma vez, a tomada de consciência da extrema complexidade do problema considerado, o que conseqüentemente indica a falsidade da conjectura de que sistemas tão simples quanto os Morse-Smale poderiam "representar" o comportamento de "quase todos" os sistema dinâmicos. As características da dinâmica associada a um ponto homoclínico serão comunicadas a Smale por Norman Levinson.

Desde o tempo de Poincaré, até os anos 50, a pesquisa em sistemas dinâmicos no Ocidente se mantinha-se por trabalhos isolados que não chegavam a formar uma escola. Exemplo destas pesquisas são os trabalhos do próprio Van der Pol(VAN DER POL, 1926), que já havia, em 1926, traçado um espaço de fase e mostrado a existência de um ciclo limite. Estudando as soluções de uma modificação da equação de Van der Pol, em três dimensões, surgem os trabalhos de Cartwright e Littlewood, nos anos quarenta. Uma das suas principais preocupações consistia em saber como variavam as soluções periódicas da equação, ou seja, se estas soluções eram estáveis, quando perturbávamos os parâmetros que definiam esta equação. Trata-se de um problema análogo ao tratado por Andronov e os matemáticos da escola de Gorki, no entanto, diferentemente dos soviéticos, Cartwright e Littlewood não chegaram a empregar métodos topológicos que permitissem generalizar as perguntas, que se restringiam a equações específicas. Para casos particulares, no entanto, eles avançaram o suficiente para encontrar comportamentos bastante surpreendentes.

A estranheza causada em Cartwright e Littlewood só ficará mais clara com os trabalhos de Levinson(LEVINSON, 1949). Usando as seções de Poincaré e analisando a transformação de pontos sobre a seção, Levinson percebe que, no conjunto invariante por esta transformação, há um número infinito de pontos periódicos[35]. Mais grave ainda, estes pontos, que correspondem a trajetórias periódicas, não podem ser desprezados, pois eles são robustos[36].

Logo após sua chegada ao Rio de Janeiro, em 1959, Smale recebe uma carta de Levinson dizendo que sua conjectura não podia ser verdadeira, pelos motivos mencionados no parágrafo anterior. Ou seja, se os Morse-Smale fossem densos, na vizinhança de um sistema qualquer, poderíamos encontrar um sistema com um número finito de pontos periódicos. Mas como encontrar um sistema assim na vizinhança de um outro sistema que possui um número infinito de pontos periódicos, se este último é robusto?

Smale percebe seu erro e imediatamente procura descrever geometricamente o conjunto que Levinson havia encontrado analiticamente. Isto dará origem à célebre "ferradura de Smale" (*horseshoe*), da qual não descreveremos a construção, posto que isto é encontrado abundantemente na literatura. Lembramos, no entanto, que se trata de uma aplicação, de um quadrado bidimensional nele mesmo, tal que, o conjunto invariante desta transformação é um conjunto de Cantor, que é produto de dois conjuntos de Cantor. Este conjunto é constituído de pontos não-errantes e, nele, os pontos periódicos da transformação são densos[37]. Isto mostra, em particular, que há um número infinito de pontos periódicos.

Se uma dinâmica possui um ponto homoclínico, ela contém uma ferradura. Além disso, este fenômeno é robusto, ou seja, estruturalmente estável[38]. Este era o motivo

[35]Esta possibilidade já havia sido mostrada por Birkhoff que é mencionado explicitamente por Levinson.

[36]Mais precisamente, a robustez aqui significava que estes conjuntos não podem ser descartados com uma perturbação C^1.

[37]Além disso, existe uma órbita que é densa neste conjunto.

[38]Falamos rapidamente destes acontecimentos pois eles são relatados com detalhes em muitas obras, pelos próprios matemáticos que protagonizaram este período do desenvolvimento da teoria. Este é, aliás, um raro exemplo em que os pesquisadores, ao contrário do que se diz usualmente, fazem questão de relatar as obscuridades encontradas no processo de construção da teoria, suas falhas, seus

da complexidade encontrada anteriormente por Poincaré, Birkhoff, Cartwright, Littlewood e Levinson. Smale confessa que, se ele conhecesse estes trabalhos nunca teria proposto a conjectura sobre a genericidade dos sistemas Morse-Smale.

A ferradura apresenta um protótipo da complexidade da dinâmica contida nos trabalhos de seus predecessores, que tanto os surpreenderam e que não se tinha arriscado a traçar. Em uma nota autobiográfica chamada *Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio*[39], Smale atribui esta parte de seu trabalho à sorte de estar no IMPA, por volta de 1960, onde confluíram tradições históricas diversas em dinâmica, que, apesar de lidarem com o mesmo assunto, faziam-no de forma isolada. A saber, são três estas tradições: Cartwright-Littlewood-Levinson; Poincaré-Birkhoff; e, finalmente, os trabalhos sobre a estabilidade estrutural dos autores soviéticos, de que ele tomou conhecimento através de Peixoto.

8.3.2 Ainda a classificação: o protótipo da hiperbolicidade

Não falamos ainda de uma propriedade importante da ferradura: a hiperbolicidade. No lugar dos pontos periódicos define-se conjuntos hiperbólicos. Grosso modo, um conjunto é hiperbólico se, em todo ponto, a dinâmica pode ser decomposta localmente em uma direção expansiva e uma direção contrativa[40]. Esta propriedade será essencial no modo como Smale propõe uma nova classificação, usando o contra-exemplo da ferradura a seu favor[41]. A ferradura para Smale não era um fim em si mesmo, mas um instrumento para se penetrar em um novo território, até então inexplorado[42]. Isto nos faz lembrar da célebre frase de Poincaré ao afirmar que as soluções periódicos eram a única *brecha* para penetrar no lugar inabordável dos conjuntos globais de trajetórias, em dimensões superiores. Birkhoff enxerga a limitação das soluções periódicas e

desvios, como motores da pesquisa.

[39]A nota foi apresentada em uma conferência realizada em 1996, no IMPA, na comemoração do aniversário de 45 anos do CNPQ e uma versão ampliada foi publicada em 1998(SMALE, 1998).

[40]O fato de que a ferradura satisfaz esta propriedade pode ser entendido intuitivamente pelo processo de construção, por uma sucessão de estiramentos e dobras, ou ainda pela sua relação com pontos homoclínicos, que aparecem na interseção de uma variedade estável com uma instável.

[41]Palis observa, em entrevista concedida à autora(PALIS, 1997), que, neste momento, Smale toma uma atitude bem ao seu estilo, de, ao invés de se preocupar com o erro, virar o jogo em favor de uma nova proposição, que virá alargar os conceitos matemáticos.

[42]Esta visão sobre o papel da ferradura é expressa por Anosov(ANOSOV, 1986) e podemos notar que ela segue a mesma linha daquela que acabamos de citar.

propõe que, o papel que elas exerciam para Poincaré, fosse substituído pelos movimentos recorrentes. Com a ferradura, ganhamos mais um aliado para explorar os aspectos globais possíveis das trajetórias definidas por uma dinâmica.

A nova tentativa de classificação irá propor um novo protótipo no qual o papel que as trajetórias periódicas exerciam nos sistemas Morse-Smale, será exercido por conjuntos mais complicados: os conjuntos hiperbólicos. Para falar destes conjuntos, que incluem a ferradura, precisamos retornar à União Soviética.

Em 1961, Smale apresenta a ferradura em um congresso em Kiev onde encontra Anosov que, em seguida, já em Moscou, o apresenta a Arnold, Novikov e Sinai[43]. Todos com contribuições fundamentais em dinâmica mas, para a nova conjectura de classificação, os trabalhos de Anosov nos interessam particularmente.

Logo após o exemplo da ferradura, Thom ventila um exemplo de difeomorfismo do toro definido pela transformação linear $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. As variedades estável e instável da origem (que é um ponto fixo) possuem inclinações irracionais e são densas no toro, interceptando-se transversalmente. Logo, o conjunto de pontos homoclínicos é denso e, conseqüentemente, os pontos periódicos também são densos, logo, infinitos. Além disso, este toro é, todo ele, um conjunto hiperbólico. Falávamos anteriormente de um conjunto finito de pontos periódicos hiperbólicos, no exemplo dos Morse-Smale; por outro lado, no caso da ferradura, os seus pontos são todos hiperbólicos, mas ela não ocupa todo o espaço de fases. No exemplo do difeomorfismo do toro, o espaço de fases todo é um conjunto hiperbólico e, motivado por este exemplo, após o encontro com Smale na União Soviética, Anosov irá propor os sistemas que ficaram conhecidos como *difeomorfismos de Anosov*. Sistemas que generalizam os fluxos geodésicos em superfícies fechadas de curvatura negativa, propostos por Hadamard, e que citamos no terceiro capítulo. Cabe ressaltar que o próprio Hadamard já estava consciente da hiperbolicidade deste exemplo. Além disso, Anosov demonstra que os sistemas que ele propõe, globalmente hiperbólicos, são estruturalmente estáveis: (ANOSOV, 1962) e (ANOSOV, 1967).

Como estes exemplos, tanto a ferradura quanto os sistemas de Anosov, são estruturalmente estáveis, a atitude de Smale será a de incorporá-los à definição de um

[43] Ver o relato de Smale sobre este encontro em (SMALE, 1980b).

novo protótipo para a dinâmica, visando sempre a genericidade da estabilidade estrutural. Há vários artigos, não apenas de Smale, que fizeram parte do processo anterior à proposição de uma nova conjectura; não iremos enumerá-los no entanto, saltando para um importante trabalho que Smale publica em 1967. Trata-se do artigo *Differentiable Dynamical Systems*, onde encontramos um panorama bastante completo da teoria que havia se desenvolvido até este ponto.

Em primeiro lugar, as definições deverão ser adaptadas ao novo propósito. O conceito de genericidade passa a ser associado a uma propriedade satisfeita por um conjunto residual e esta é exatamente a definição a que Thom se refere na citação que extraímos de seu livro *Stabilité structurelle et morphogenèse*. Não será mais enfocada a globalidade das trajetórias, mas apenas os conjuntos não-errantes da dinâmica[44]. A estabilidade estrutural exigida passará, então, a ser a estabilidade estrutural dos conjuntos não-errantes[45].

Quanto à caracterização do protótipo, ela deverá se voltar para a descrição dos conjuntos não-errantes possíveis, dentre os quais podem se encontrar as dinâmicas da ferradura e dos sistemas de Anosov. A propriedade essencial, inspirada nos exemplos que acabamos de citar, é a hiperbolicidade destes conjuntos e o fato de que, neles, os pontos periódicos devem ser densos. Sistemas deste tipo são chamados *Axioma A*[46]. Smale propõe ainda uma decomposição dos conjuntos não errantes deste tipo em sub-conjuntos de base que devem ser transitivos, isto é, possuir uma trajetória densa[47]. Cada um deste conjuntos de base seria como sistemas de Anosov e, para que cada um deles fosse estável, ele acrescentou uma condição de transversalidade entre as variedades estáveis e instáveis[48].

Como instrumento fundamental para penetrar no aspecto global da dinâmica, os

[44]Conjuntos que haviam sido definidos por Birkhoff (ver terceiro capítulo) e caracterizados por conterem informações importantes sobre a dinâmica, isto é, as que possuem um tipo mínimo de recorrência.

[45]Como um conjunto não-errante era chamado de Ω, esta condição foi denominada Ω-estabilidade.

[46]Na entrevista que mencionamos anteriormente, Palis observa a infelicidade de certas denominações empregadas na época, como Ω-estabilidade para a estabilidade dos conjuntos não-errantes e *Axioma A*. Neste último caso, propõe-se que estes sistemas sejam chamados apenas ***hiperbólicos***, como efetivamente já é feito.

[47]Cabe lembrar que Birkhoff já havia anunciado a importância de se procurar as regiões do espaço de fases onde a dinâmica é transitiva, conforme mencionamos no capítulo 7.

[48]Na conferência comemorativa dos 60 anos de Smale, Palis (PALIS, 1993) relata como esta condição foi substituída por uma outra, a ausência de ciclos, que acabou por se firmar como condição necessária para a estabilidade.

conjuntos hiperbólicos vêm substituir as soluções periódicas— propostas por Poincaré— e precisar as propriedades dos movimentos com algum tipo de recorrência— propostos por Birkhoff. Além disso, concluir-se-á, mais tarde, que a noção de hiperbolicidade está intimamente relacionada à estabilidade estrutural. No entanto, com relação à genericidade, isto é, quanto à questão de saber se os sistemas hiperbólicos constituem a "maior parte" dos sistemas dinâmicos, estava-se ainda muito longe de uma resposta. As complexidades robustas que ainda estariam para ser descobertas superariam todas as expectativas. Contudo, isto não nos impede de afirmar, parafraseando Poincaré, que os sistemas hiperbólicos eram a única brecha para se penetrar no inabordável.

8.3.3 A estabilidade da instabilidade

Um dos aspectos da dinâmica associada à presença de uma ferradura é que, para duas condições iniciais próximas, seus iterados podem divergir. Esta propriedade serve para caracterizar o que denominou-se "caos"[49]. No caso de modelarmos um sistema físico por um sistema dinâmico determinista, a sensibilidade às condições iniciais tem como conseqüência um problema de previsibilidade para o sistema físico. Esta propriedade indica a separação entre determinismo e previsibilidade no estudo de um sistema físico, uma vez que, mesmo o modelo dinâmico sendo determinista, a sensibilidade às condições iniciais impõe uma limitação à previsão. Preferimos não seguir o apelo inicial da noção de "caos"[50].

A sensibilidade às condições iniciais é um tipo de instabilidade no conjunto de trajetórias, mais precisamente, se for utilizada a definição de estabilidade de Lyapunov, tal como a apresentamos no capítulo anterior. Dissemos também que a novidade da estabilidade estrutural, tal como proposta por Andronov e Pontryagin, é versar sobre o conjunto dos sistemas dinâmicos, e introduzir, neste conjunto, a questão da estabilidade, propondo que um modelo que não possua estabilidade estrutural não pode ser adequado à modelagem de um sistema físico. Quanto ao sistema físico que

[49]Aparentemente esta expressão foi utilizada pela primeira vez por Li e Yorke, em 1974, ao estudar o atrator de Lorenz, de que falaremos mais tarde. Para maiores detalhes ver tese de David Aubin(AUBIN, 1998).

[50]Se temos alguma restrição a esta nomenclatura, ela se deve exclusivamente ao modo, muitas vezes ideológico, como este conceito é divulgado e exportado para outras áreas.

estamos modelando, a estabilidade de Lyapunov (equivalente à não existência da sensibilidade às condições iniciais) é a condição de possibilidade da previsibilidade a partir de um dado modelo e a estabilidade estrutural, a condição de possibilidade da matematização do sistema físico por um certo modelo.

Os conjuntos hiperbólicos que mencionamos no parágrafo anterior, possuem sensibilidade às condições iniciais. No caso, por exemplo, dos fluxos geodésicos, isto já havia sido notado por Hadamard, o que impressionou alguns célebres cientistas de seu tempo, como Pierre Duhem[51]. O mais surpreendente nos exemplos da ferradura e dos difeomorfismos de Anosov é que eles são estruturalmente estáveis. Isto é, o fenômeno de instabilidade relacionado à sensibilidade às condições iniciais é estável por perturbações na definição do sistema. Podemos dizer que a instabilidade *no* conjunto de trajetória é estável, quando a estabilidade é definida no nível dos sistemas. Justamente por isso, não é contraditório dizer que se trata de um caso de "estabilidade da instabilidade".

O exemplo de Thom, que deu origem aos sistemas de Anosov, em particular, possui a propriedade de sensibilidade às condições iniciais. Apesar da complicação de suas trajetórias, a estrutura global destas trajetórias é tão bem compreendida, que o próprio Thom observa que seria "ridículo" dizer que se trata de uma situação "caótica"[52]. Alain Chenciner vai mais longe, afirmando, em uma conferência apresentada no colóquio *Épistémologie des systèmes dynamiques* realizado em Paris em 1999[53], que um fluxo geodésico em uma superfície com curvatura negativa, por exemplo, pode ser considerado integrável. De modo genérico, um sistema é completamente integrável, tradicionalmente, quando podemos escrever fórmulas para as soluções, mesmo que nada saibamos sobre a estrutura global das trajetórias[54]. A geometria se

[51]Sobre o exemplo de Hadamard, ver (CHABERT, 1992). Sobre as origens da discussão sobre a sensibilidade às condições iniciais e suas relações com o problema do determinismo, ver a tese de Carlos Koehler(KOEHLER, 1995).

[52]Apesar do qualificativo "caótico", introduzido por Li e Yorke, estar associado ao atrator de Lorenz, que sabemos ser uma situação não hiperbólica, ele estava associado à sensibilidade às condições iniciais e é a esta propriedade que se relaciona o "caos", tal como se tornou amplamente difundido.

[53]As conferências estão reunidas no livro de mesmo nome (FRANCESCHELLI *et al.*, Em preparação).

[54]Há diversas definições de integrabilidade e, para uma discussão histórica e conceitual de suas diferenças e semelhanças, indicamos a tese de Ildeu de Castro Moreira(MOREIRA, 1996). Salientamos apenas que, todas as definições usuais diferem do sentido em que empregamos este conceito neste momento, que é fundamentalmente geométrico.

torna, portanto, essencial se queremos entender o exemplo de Hadamard, que sabemos hoje ser um caso particular de sistema de Anosov.

Neste caso não há fórmulas e, no entanto, "eu diria, de bom grado, que se trata, ainda, de um problema integrável, mesmo que a integrabilidade de que se trata seja tão distante quanto possível da integrabilidade completa no sentido da mecânica clássica"(CHENCINER, 1999).

Consideramos que a estabilidade dos conjuntos, de que tratamos aqui, fornece uma razão a mais para concordarmos com Thom e Chenciner.

Podemos dizer que os exemplos encontrados para mostrar que os sistemas hiperbólicos não são densos, possuem um outro tipo de estabilidade da instabilidade. Estes são sistemas que também possuem sensibilidade às condições iniciais, mas não são hiperbólicos, de modo robusto. Descobriu-se que podia haver domínios, no conjunto dos sistemas dinâmicos definidos em uma certa variedade, preenchidos completamente por sistemas que não são estruturalmente estáveis. Isto quer dizer que, perturbando-se qualquer um dos sistemas deste domínio, obteremos sistemas qualitativamente distintos. A estabilidade da instabilidade a que nos referimos ao falarmos destes exemplos, é a persistência da instabilidade estrutural. Ou seja, a instabilidade desta vez não está em outro nível (no conjunto das trajetórias), mas no espaço dos sistemas e é esta instabilidade que pode ser persistente. Claro que, neste caso, a persistência não é a estabilidade estrutural, mas não entraremos nos detalhes das novas definições que surgem, para fugirmos do risco de ser levados longe demais.

8.4 Um exemplo de aproximação com a física: a transição ao movimento turbulento dos fluidos

Analisaremos, nesta seção, o argumento do artigo escrito por David Ruelle e Floris Takens, publicado em 1971: *On the Nature of Turbulence*(RUELLE & TAKENS, 1971)[55]. Escolhemos este trabalho por sua novidade e pela influência por ele exercida no trabalho dos físicos que se dedicavam ao estudo da transição à turbulência.

[55]Esta seção provém, quase integralmente, de um artigo escrito pela autora em conjunto com Sara Franceschelli: "*Les scénarios vers le chaos entre physique et mathématique: les systèmes dynamiques à l'oeuvre dans l'étude de la turbulence*"(FRANCESCHELLI & ROQUE, n.d.). Ver também (FRANCESCHELLI & ROQUE, 2000).

Principalmente no que tange à utilização dos conceitos e das ferramentas qualitativas.

A novidade deste artigo é a utilização do modo de pensar da Teoria dos Sistemas Dinâmicos para descrever o que se passa com o movimento de um fluido viscoso, incompreensível, submetido a uma força externa. Para um fluido que ocupa uma região dada do espaço tridimensional, o seu estado pode ser descrito por um campo de velocidades e a evolução deste campo é dada pela equação de Navier-Stokes, que habita um espaço de dimensão infinita.

A transição do fluido de um estado laminar para um estado turbulento havia sido estudada, em torno dos anos quarenta, por L. Landau e E.Hopf ((LANDAU, 1944) e (HOPF, 1948)). Mesmo que estes pesquisadores tenham trabalhado independentemente, eles propuseram interpretações semelhantes sobre o fenômeno. Segundo eles, um estado estacionário seria desestabilizado sucessivamente por superposição de diferentes velocidades independentes, e tais desestabilizações determinariam uma transição para um novo movimento quase-periódico, que é não-estacionário, mas estável. Um estado turbulento é obtido quando se tende a um número infinito de freqüências independentes, chamadas *modos*. Como atribui-se um grau de liberdade a cada uma destas freqüências, a turbulência está associada a um número infinito de graus de liberdade.

Um fato a ressaltar no trabalho de Hopf, é que, ao se interessar pelo comportamento assintótico do sistema representado no espaço de fases, ele já menciona a possibilidade de restringir o movimento a uma variedade de dimensão finita:

"*The qualitative mathematical picture (...) : to the flows observed in the long run after the influence of the initial conditions has died down there correspond certain solutions of the Navier-Stokes equations. These solutions constitute a certain manifold in phase space invariant under the phase flow. Presumably owing to viscosity it has a finite number of dimensions*" (HOPF, 1948).

Uma das maiores inovações da abordagem proposta por Ruelle e Takens é justamente a de tentar entender o estabelecimento da turbulência depois de um número finito de bifurcações, modelando o problema por um sistema com número de graus de liberdade não apenas finito, mas pequeno. Neste caso, a aparição de um espectro contínuo de freqüências pode se dar subitamente, não precisando depender de infinitas desestabilizações sucessivas. Mas isto só é possível porque os autores se servem fortemente da Teoria dos Sistemas Dinâmicos na interpretação e na modelização do problema.

Começamos pela noção de *genericidade*, que possui um papel fundamental no artigo de Ruelle e Takens[56]. Esta propriedade é definida, logo de início, do mesmo modo como havia sido anteriormente proposta por Smale. Aliás, este trabalho sobre a turbulência é fortemente inspirado pelo artigo *Differentiable Dynamical Systems* que, como dissemos, oferece um resumo dos rumos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos naquele momento. O argumento principal de Ruelle e Takens consiste na utilização das idéias de estabilidade e de genericidade para criticar o paradigma dos *modos* de Landau. Esse autores iniciam o artigo com um exemplo bidimensional, onde a não-genericidade dos movimentos quase-periódicos resulta do Teorema de Peixoto, uma vez que este teorema afirma serem densos, no conjunto dos sistemas bidimensionais, os sistemas nos quais o conjunto limite se compõe unicamente de um número finito de pontos periódicos. Um movimento quase-periódico tem lugar sobre um toro e, se este toro é bidimensional, podemos encontrar, tão próximo quanto se queira, um outro sistema estável no qual o conjunto não-errante possui um número finito de pontos periódicos. Logo, os movimentos quase-periódicos não são genéricos.

Este raciocínio é recorrente na argumentação do artigo, que consiste em concluir que um sistema é não-genérico se existe, em sua vizinhança, um aberto de sistemas que são qualitativamente distintos do original. Na verdade, o próprio Ruelle observa[57] que dizer, por este argumento, que os movimentos quase-periódicos são não-genéricos é um abuso de linguagem, o mais correto sendo dizer que os movimentos "não quase-periódicos" são genéricos. Está claro, no entanto, que a idéia é mostrar que os movimentos quase-periódicos são excepcionais.

Mas, em dimensões maiores que dois, não são conhecidos os conjuntos não-errantes genéricos e, em particular, a generalização do teorema de Peixoto não vale. Aqui se

[56] As idéias utilizadas neste artigo foram expostas no ano anterior, por Ruelle, em um curso cujas notas foram publicadas por Eckmann(RUELLE, 1970). Tais notas nos foram muito úteis na presente análise.

[57] No curso que mencionamos na nota anterior .

insere a maior influência do artigo de Smale de 1967, onde era afirmada uma nova conjectura de estabilidade e genericidade. Um dos tipos de conjunto invariante proposto neste trabalho, além da ferradura e dos difeomorfismos de Anosov, era um conjunto obtido por uma aplicação expansiva de uma variedade compacta, que consiste em torcer duas vezes um toro e mergulhá-lo em si mesmo, repetindo a operação ao infinito. O conjunto invariante que obtemos após esta operação é um atrator que é produto de um conjunto de Cantor pela variedade. Este exemplo, chamado *solenóide*, fora apresentado por Shub[58] e constitui um atrator estruturalmente estável.

Ruelle e Takens sugerem, então, que existe um atrator deste tipo na vizinhança de um movimento quase-periódico. Como este atrator é estável, ele não pode ser descartado como um caso excepcional. Além disso, segundo os autores, este conjunto é "não-trivial", por ser produto de um conjunto de Cantor por uma variedade e é justamente a esta propriedade que se refere o qualificativo de *atrator estranho*, empregado para designar o solenóide, sem outras definições mais precisas. Detalharemos, em seguida, como tal objeto aparece na descrição da transição para a turbulência.

No movimento de um fluido, um ponto fixo da equação de Navier-Stokes caracteriza um movimento estacionário. O estudo da transição à turbulência parte deste estado conhecido, variando o valor do parâmetro. Ruelle e Takens propõem que esta variação seja feita de modo "fisicamente aceitável", desprezando toda variação que não tenha sentido físico, interessando-se então pelos pontos de bifurcação. Em um primeiro momento, aumenta-se o valor do parâmetro até obter uma bifurcação de Hopf, que transforma um ponto fixo em ciclo limite[59]. Considera-se inicialmente o caso em que todos os autovalores possuem parte real negativa e faz-se variar o parâmetro, parando quando dois dos autovalores cruzam o eixo imaginário. No sub-espaço do espaço de fases que corresponde a tais autovalores, teremos um ciclo limite.

Intervém neste momento um outro argumento chave dos autores, o Teorema da Variedade Central, usado para justificar que "não se passa essencialmente nada no espaço ortogonal ao sub-espaço em questão" (RUELLE, 1970). Os teoremas deste tipo[60]

[58] No artigo de Smale é citada a tese de Shub, mas este resultado foi publicado em (SHUB, 1969).

[59] Atestamos mais uma vez o quanto o pensamento de Hopf já era qualitativo e vimos também como esta bifurcação fora usada por Andronov.

[60] Para justificar seu ponto de vista, os autores mencionam um artigo de Kelley(KELLEY, 1967), um de Hirsch, Pugh e Shub(HIRSCH *et al.*, 1970) sobre as variedade invariantes e o livro *Invariant Manifolds*, antes de sua publicação(HIRSCH *et al.*, 1977).

são usados para legitimar que, após a primeira bifurcação, olhemos o que se passa em dimensão dois sobre uma variedade localmente invariante, que contém os pontos localmente recorrentes do sistema. Como negligenciam-se os estados transitórios, os fenômenos que têm lugar na codimensão deste espaço não possuem interesse. Isto permite a redução do número de dimensões do problema.

A interpretação da turbulência como um fenômeno de poucos graus de liberdade foi decisiva para os físicos teóricos e experimentais que se inspiraram no trabalho de Ruelle e Takens, como mencionaremos mais tarde. Esta redução só foi possível pela atitude, dos autores, de desprezar completamente o caráter preciso da equação de Navier-Stokes, o que possibilitou realizar uma abstração, típica do ponto de vista qualitativo, na descrição do fenômeno. Será investigado, então, depois de quantas bifurcações aparecerá um *atrator estranho*, que caracterizará a turbulência, dentro desta nova interpretação.

Sobre o ciclo limite que obtivemos após a primeira bifurcação, traçamos uma seção de Poincaré e efetuamos, sobre ela, uma segunda bifurcação de Hopf. Isto fará aparecer um toro, sobre o qual existe um movimento quase-periódico para o qual devem tender os outros. Este raciocínio não pode ser levado adiante após esta bifurcação, a menos que tenhamos um caso específico onde a situação é "quase fatorizável" ("*nearly split*"). Prosseguimos assim com este caso, em que podemos restringir a análise do movimento sobre toros "atratores", e a mesma teoria da variedade central, torna legítima a procura de atratores na vizinhança destes toros. Isto porque estes atratores devem se encontrar nos conjuntos não-errantes e, considerando que as formas da recorrência local estão na vizinhança destes toros, esta é uma boa pista para investigar os atratores.

Se o toro possui dimensão igual ou superior a quatro, os autores demonstram então que, perturbando-se um pouco o sistema, obtém-se um aberto de sistemas que possuem um atrator estranho que, neste caso, é um solenóide. Como estes conjuntos são estruturalmente estáveis, não podem ser negligenciados como uma "patologia excepcional", sendo candidatos mais adequados que os movimentos quase-periódicos para descrever a turbulência[61].

[61] Os autores afirmam que os atratores estranhos não podem ser descartados como uma "patologia não genérica". O que poderia ser interpretado como uma afirmacão de que estas atratores são

Na época em que o artigo de Smale foi publicado, ainda não se tinha nenhum resultado sobre a genericidade do protótipo que ele havia proposto, e este resultado era um dos objetivos de sua conjectura. Conseqüentemente, nada se podia saber sobre a genericidade da interpretação empregada por Ruelle e Takens. Tendo demonstrado que na vizinhança de um movimento quase-periódico existe um aberto de sistemas que possuem atratores estranhos, estruturalmente estáveis, pode-se concluir que os movimentos quase-periódicos não são estruturalmente estáveis nem densos. Isto demonstra, ao mesmo tempo, o caráter patológico e a não-genericidade dos movimentos quase-periódicos. No entanto, no que concerne à genericidade do protótipo proposto por Ruelle e Takens, nada se podia saber. Sabemos que, se o encontramos, não o podemos desprezar, pois são robustos. Mas seriam eles abundantes?

Não se sabia. Mesmo no caso de existir uma resposta afirmativa, Ruelle e Takens observam o quanto a definição da genericidade pela densidade pode ser inadequada para a física. O complemento de um conjunto denso pode não ter medida nula. Qual seria o tamanho, no sentido da medida, do protótipo que eles haviam proposto, no espaço de todos os sistemas? Como definir uma medida fisicamente significativa neste sistema? Estas perguntas não foram colocadas pela primeira vez pelos autores que estudavam a turbulência. Vários matemáticos nesta época já estavam trabalhando com esta visão do problema, que muda consideravelmente o rumo da teoria.

Sobre o artigo *On the Nature of Turbulence*, podemos afirmar ter sido ele o primeiro passo na procura dos possíveis comportamentos que podem caracterizar a transição para a turbulência, para além dos movimentos quase-periódicos. O protótipo que eles propõem é apenas um exemplo, que abre uma longa temporada de pesquisas, em física teórica e experimental, que vão em diferentes sentidos: desde confirmar o cenário proposto por Ruelle e Takens, até propor novos cenários. Citamos, em particular, os cenários de Coullet e Tresser; o de Feigenbaum; e o da intermitência, proposto pela conjugação dos físicos teóricos e experimentais Manneville e Pommeau, Bergé e Dubois. Sobre a influência do ponto de vista de Ruelle e Takens em alguns destes trabalhos, mencionamos o artigo escrito pela autora em conjunto com Sara

genéricos. Isto não é verdade, como veremos em seguida. É importante reter aqui que a não-excepcionalidade dos atratores estranhos empregados por Ruelle e Takens, só pode ser justificada por sua propriedade de estabilidade estrutural.

Franceschelli(FRANCESCHELLI & ROQUE, n.d.). Um dos pontos deste trabalho foi mostrar como certas ferramentas da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, a partir do trabalho de Ruelle e Takens, se fazem presentes nos métodos dos físicos, como é o exemplo da utilização de seções de Poincaré, para diminuir a dimensão do modelo na interpretação de certos fenômenos, o que vem reforçar nossa proposição de que a seção de Poincaré é um gesto, cujos desdobramentos são inesgotáveis. Mais geralmente, sobre a importância do ponto de vista da Teoria dos Sistemas Dinâmicos no trabalho dos físicos, indicamos a tese de Sara Franceschelli *Construction de signification physique dans le métier de physicien: le cas du chaos déterministe*(FRANCESCHELLI, 2001).

Terminamos por observar que alguns exemplos vindos da física *indicaram* aos matemáticos que devia ser falsa a conjectura sobre a genericidade dos sistemas hiperbólicos, de um modo mais profundo do que os próprios matemáticos haviam pensado. Citamos, em particular, os exemplos do atrator de Lorenz e do atrator de Hénon, independentes do trabalho de Ruelle e Takens mas, a princípio, descobertos a partir da motivação de considerações físicas, levando os matemáticos a se debruçarem sobre suas propriedades.

8.5 Qual é afinal o tamanho do mundo hiperbólico?

Procuramos nesta seção resumir, muito brevemente, o que aconteceu, depois que se averiguou que a última conjectura de Smale não tinha uma resposta positiva. Deixamos de lado, tanto nas seções anteriores como nessa, outros campos importantes de pesquisa em sistemas dinâmicos, menos inspirados pela vontade de classificação. Na conferência inaugural do colóquio *Épistémologie des systèmes dynamiques*, realizado em Paris em novembro de 1999, Jean-Christophe Yoccoz inicia sua intervenção, dizendo que ela poderia seguir os três caminhos que passamos a mencionar(YOCCOZ, 1999).

Como os sistemas dinâmicos podem ser vistos como o estudo de fenômenos de recorrência em sistemas com lei de evolução temporal, um destes caminhos seria a descrição dos diferentes tipos de recorrência. Uma segunda possibilidade seria justamente falar da ambição de descrever o comportamento da "maioria" dos sistemas dinâmicos, onde seria interessante comentar o que deve se compreender por "maioria" e como diferentes noções de estabilidade se ligam a este propósito. Yoccoz escolhe, no entanto, uma terceira via: mostrar como os conceitos de hiperbolicidade e de quase-periodicidade são diferentes "avatares" na história dos sistemas dinâmicos e como eles evoluíram. Esta análise se relaciona com variados fenômenos encontrados no estudo dos sistemas dinâmicos conservativos, associados a problemas da mecânica celeste, onde há uma riqueza inextricável de comportamentos de ambos os tipos.

Estes três caminhos não são obviamente independentes. Como o problema da classificação nos interessa em particular, mencionaremos nesta seção, brevemente, os rumos da tentativa de caracterização geral dos sistemas dinâmicos.

Não se tem uma resposta precisa à pergunta que intitula esta seção. Nos anos setenta, foi encontrado um contra-exemplo para a conjectura de que os sistemas estruturalmente estáveis são genéricos no conjunto dos sistemas dinâmicos: um aberto de sistemas instáveis. Isto mostrava que a noção de estabilidade estrutural talvez fosse excessivamente restritiva e várias tentativas foram feitas no sentido de enfraquecer esta noção para que a conjectura básica continuasse válida.

Mostrou-se finalmente que a noção de estabilidade estrutural (incluindo suas variantes) estaria intimamente relacionada ao conceito de hiperbolicidade[62]. No entanto, ao contrário do que propunha a conjectura citada, o conjunto dos sistemas hiperbólicos estava longe de traduzir o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos. A partir da indicação de variados exemplos, muitas vezes formulados a partir de considerações físicas (como mencionamos na seção anterior), começou-se a notar que o complementar dos sistemas hiperbólicos, no conjunto dos sistemas dinâmicos, devia ser muito maior do que se pensava, incluindo comportamentos complexos, ainda longe de ser compreendidos. Alguns exemplos destes comportamentos são as cascatas de duplicação de período de Feigenbaum, Coullet e Tresser; o atrator de Hénon; o atrator de Lorenz e a coexistência de infinitos poços[63].

[62]Dentre os nomes associados a estes trabalhos, citamos Robbin, de Melo, Robinson, Liao, Sannami, Palis e, principalmente, Mañe.

[63]Este fenômeno foi identificado primeiramente por Newhouse, no caso bidimensional e por Palis e Viana, no caso n-dimensional.

Este novo universo podia ser denominado o "*dark realm*" da dinâmica[64]. Sobre os comportamentos complexos que estariam incluídos neste "*dark realm*" da dinâmica, podemos fazer uma primeira pergunta: Qual seria o disparador de mudanças bruscas na dinâmica?

Numerosos exemplos mostravam que, por trás desta dinâmica complexa, estavam presentes as bifurcações homoclínicas, que têm lugar quando as variedades estáveis e instáveis se interceptam, não transversalmente, possuindo um ponto de tangência. Funda-se aí um outro programa, cujo procedimento é usar as bifurcações homoclínicas como mecanismo principal para se entender os fenômenos complexos que ocorrem fora do mundo hiperbólico[65]. Dissemos que a crença de que o mundo hiperbólico conteria a maioria dos sistemas dinâmicos foi destruída pelo surgimento de exemplos de sistemas dinâmicos com comportamento não-hiperbólico persistente, e pode-se esperar que um sistema não-hiperbólico, contendo algum dos comportamentos complexos que haviam sido encontrados, possa ser entendido a partir das bifurcações homoclínicas.

O objetivo será ainda entender a complexidade da dinâmica para a maioria dos sistemas dinâmicos não hiperbólicos. Contudo, neste caso, isto será feito em um sentido distinto do programa inicial que procurava descrever a dinâmica para um conjunto aberto e denso ou para um conjunto residual. Pretende-se, no novo programa, encontrar um subconjunto denso no conjunto de sistemas dinâmicos tal que todo sistema neste subconjunto, que não seja persistentemente hiperbólico, exiba uma bifurcação de algum tipo. Paralelamente, deseja-se descrever os fenômenos prevalentes (no sentido do tamanho do espaço de parâmetros) que ocorrem na dinâmica quando desdobramos uma bifurcação. Complementando esta pergunta, deve-se descrever quais são os fenômenos mais comuns, que estão próximos dos elementos de um subconjunto denso do conjunto de todos os sistemas dinâmicos.

Paralelamente, desde a década de 70, um novo enfoque que transformaria a compreensão de uma dinâmica em uma noção estatística, havia sido introduzido, dando

[64]Sobre esta denominação e a tomada de consciência de que o tamanho deste conjunto era maior do que se pensava, citamos Palis(PALIS, 1993).

[65]A abundância dos fenômenos que aparecem quando desdobramos uma bifurcação pôde ser estudada usando conjuntos de Cantor e isto significaria uma fusão entre uma teoria das bifurcações e uma teoria da dimensão fractal. Alguns teoremas fundamentais desta teoria devem-se a Newhouse, Palis, Takens, Moreira e Yoccoz.

origem à Teoria Ergódica, do qual faziam parte proeminentes autores soviéticos. Inspirada na mecânica estatística e na teoria cinética dos gases, formulada inicialmente por Birkhoff e desenvolvida pela escola russa, esta teoria tem como principal objetivo "analisar as causas da aparição de leis estatísticas nos sistemas dinâmicos deterministas", como afirma Sinai, que é um dos protagonistas desta teoria[66]. Para um sistema em que as trajetórias divirjam exponencialmente com o tempo, não faz sentido descrever o comportamento individual de cada trajetória e, na Teoria Ergódica, o comportamento do conjunto de trajetórias será descrito por médias. O estudo do conjunto de trajetórias não adiciona qualquer mecanismo aleatório exterior à dinâmica determinista, mas é apenas um processo de avaliação, uma escolha particular de uma unidade de medida para definir quantitativamente um grupo de trajetórias com determinado comportamento qualitativo. Dado um sistema com trajetórias sensíveis às condições iniciais ("caótico"), deduzimos um modo de descrever o conjunto destas trajetórias de modo estatístico, associando uma medida ergódica ao espaço percorrido pelas trajetórias e estudando a regularidade deste conjunto; exatamente como no caso de um fenômeno aleatório.

Para o projeto de uma descrição geral do conjunto de sistemas dinâmicos, devemos definir noções equivalentes às utilizadas anteriormente— comportamento assintótico típico, maioria e robustez— mas relativas à abordagem estatística. Queremos saber quando um sistema é estável e genérico no sentido probabilístico.

Em um modelo físico, por exemplo, a cada iteração podemos estar considerando um sistema distinto, obtido do sistema inicial pela adição de pequenos ruídos. Levando em conta estes ruídos, quais serão seus efeitos na descrição estatística do comportamento do sistema? Esta descrição é estável? Quais seus invariantes?

Por que pode-se esperar que alguma estabilidade apareça neste contexto? Como afirma Sinai, a idéia de que a instabilidade de um sistema dinâmico comporta uma propriedade notável de estabilidade a pequenas perturbações se baseia conceitualmente no seguinte: em um sistema instável, passado um intervalo grande de tempo, já há uma tal variedade de trajetórias que, se perturbarmos o sistema, ao fim de muito tempo, as trajetórias do sistema perturbado irão se aproximar daquelas do

[66]Usamos o artigo "*L'aléatoire du non-aléatoire*"(SINAI, 1992).

sistema original e, como se passou muito tempo, isto será suficiente para que as leis estatísticas se estabeleçam.

Um sistema que, **no** conjunto de trajetórias, é muito instável, já inclui quase toda a diferença possível, passado um intervalo grande de tempo e, perturbando um conjunto tão variado, não estaremos acrescentando diferenças qualitativamente importantes. Daí a estabilidade no conjunto dos sistemas, a partir de uma nova definição de estabilidade. É importante notar, mais uma vez, que não é necessário nenhum mecanismo aleatório exterior ao sistema; as propriedades estatísticas resultam de propriedades deterministas, como a instabilidade de uma trajetória. Quanto mais instáveis as trajetórias, mais as propriedades estatísticas se manifestam, globalmente, de modo estável.

Diz-se que um sistema dinâmico é estocasticamente estável se suas propriedades estatísticas permanecem com a introdução de ruídos[67]. A partir das novas definições, mas no espírito do projeto inicial de obter uma caracterização geral dos sistemas dinâmicos, Palis propôs algumas conjecturas de classificação. A idéia principal é mostrar que todo sistema dinâmico pode ser aproximado por um outro que contenha um número finito de atratores com propriedades estatísticas bem definidas e estabilidade estocástica. Os atratores caracterizam o comportamento assintótico do sistema

sistema original e, como se passou muito tempo, isto será suficiente para que as leis estatísticas se estabeleçam.

Um sistema que, **no** conjunto de trajetórias, é muito instável, já inclui quase toda a diferença possível, passado um intervalo grande de tempo e, perturbando um conjunto tão variado, não estaremos acrescentando diferenças qualitativamente importantes. Daí a estabilidade no conjunto dos sistemas, a partir de uma nova definição de estabilidade. É importante notar, mais uma vez, que não é necessário nenhum mecanismo aleatório exterior ao sistema; as propriedades estatísticas resultam de propriedades deterministas, como a instabilidade de uma trajetória. Quanto mais instáveis as trajetórias, mais as propriedades estatísticas se manifestam, globalmente, de modo estável.

Diz-se que um sistema dinâmico é estocasticamente estável se suas propriedades estatísticas permanecem com a introdução de ruídos[67]. A partir das novas definições, mas no espírito do projeto inicial de obter uma caracterização geral dos sistemas dinâmicos, Palis propôs algumas conjecturas de classificação. A idéia principal é mostrar que todo sistema dinâmico pode ser aproximado por um outro que contenha um número finito de atratores com propriedades estatísticas bem definidas e estabilidade estocástica. Os atratores caracterizam o comportamento assintótico do sistema e, para que sua descrição contenha informação significativa sobre o sistema como um todo, a conjectura acrescenta a exigência de que a união das bacias de atração recubra o espaço ambiente (no sentido da medida). Além disso, perturbando o sistema, continuamos tendo um número finito de atratores com as propriedades acima. Mais precisamente, após a perturbação, a medida da bacia destes atratores é quase total; isso significa que aquilo que está sendo introduzido de novo possui medida quase nula.

8.6 O papel da exceção e do erro em matemática

Desde a origem da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, identificamos uma tensão entre comportamentos excepcionais e gerais que sempre foi um componente fundamental

[67]Destacamos, na definição desta propriedade, o trabalho de Marcelo Viana. Este afirma, em entrevista à autora(VIANA, 1997), a crença de que a grande maioria dos sistemas sejam estocasticamente estáveis. Isto porque, por um lado, os exemplos que se conhecem que não o são, correspondem a situações muito particulares e, por outro lado, há amplas classes de sistemas, que foram estudadas, em que se mostrou que os sistemas são estocasticamente estáveis.

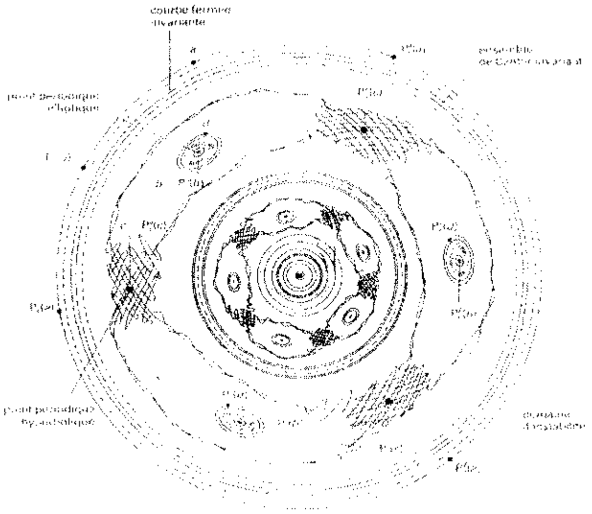
no seu desenvolvimento. O potencial genético desta tensão não é estrangeiro à matemática e, por esta razão, decidimos insistir sobre este aspecto.

No artigo de Poincaré, "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*", já se falava de comportamentos excepcionais, como era o caso de uma singularidade de tipo *centro*. A excepcionalidade de um centro ganhou um sentido matemático preciso quando Poincaré identificou-a à necessidade da anulação de um número infinito de constantes. Sabemos hoje, estando munidos do espaço (de dimensão infinita) dos sistemas, que trata-se do drama de um sub-espaço de codimensão infinita.

Ao mesmo tempo em que a excepcionalidade matemática se torna precisa, neste caso, ela se distancia da excepcionalidade física. O caso dos centros não podia ser desprezado pois, no dizer do próprio Poincaré, ele constituía justamente a situação encontrada ao se estudar "as equações gerais da dinâmica". Sabemos hoje serem tais equações associadas aos sistemas conservativos e que o "problema dos centros" era produto da difícil questão sobre a integrabilidade destes sistemas.

Deste último ponto, Poincaré estava bem consciente, tendo desenvolvido uma teoria que, como dizia Hadamard, faz com que os exemplos que conhecíamos anteriormente, onde sabíamos integrar, passassem a ser vistos como casos degenerados. Birkhoff atribui o papel proeminente de equações excepcionais, como são as equações da dinâmica, à coincidência entre o que ele denominava estabilidade completa e a situação elíptica. Conhecemos hoje o quanto podem se apresentar intrincados comportamentos hiperbólicos e elípticos nas interpretações matemáticas do problema da estabilidade do sistema solar. Atestamos assim, além da diferença entre caso conservativo e dissipativo, uma tensão entre comportamentos hiperbólicos e elípticos.

A tensão entre casos excepcionais e gerais, a partir dos centros, se desdobraria em certas oposições: entre situação integrável e situação geral; entre caso conservativo e caso dissipativo. Mas uma tensão implícita entre comportamento elíptico e comportamento hiperbólico permanece. A figura abaixo, tirada do artigo de Alain Chenciner que define "*systèmes dynamiques*" na *Encyclopédie Universalis*(CHENCINER, 1985), é a imagem de fenômenos que podem ocorrer em uma pequena vizinhança de um ponto fixo elíptico de uma aplicação de Poincaré:



Da constatação da excepcionalidade matemática associada às "equações da dinâmica", retemos principalmente que ela se distingue da excepcionalidade física. Este não será o caso, em princípio, da definição da estabilidade estrutural. Quando a questão da estabilidade se coloca neste nível, ela se associa à possibilidade de matematização de um sistema físico. Exigir a estabilidade estrutural significa eliminar os comportamentos "excepcionais", onde esta palavra designa sistemas "patológicos", cujas propriedades qualitativas se destroem facilmente.

Em todos os níveis a estabilidade se associa a uma propriedade de permanência. A estabilidade definida no conjunto de trajetórias de um sistema dinâmico tinha o mesmo objetivo, mas procurava responder uma pergunta sobre um dado sistema físico. A partir da noção de estabilidade estrutural são estabelecidas classes e procura-se estudar a abundância destas classes no espaço de todos os sistemas dinâmicos. Privilegia-se o domínio onde os sistemas habitam no lugar dos sistemas individuais que constituem um tal domínio. Estabelece-se assim um novo problema, para o qual as respostas versam sobre as propriedades "essenciais" e este problema é colocado em um outro nível.

Não estudamos mais objetos individualmente, mas classes de objetos que excluam as patologias e impomos que estas classes sejam abundantes. Neste novo problema a questão da excepcionalidade se reparte em duas: robustez e genericidade. Temos diferentes definições possíveis para a genericidade, como densidade e como medida.

Poderíamos dizer que um sub-espaço de codimensão infinita é trivialmente excepcional neste caso. Sabemos também que um conjunto denso pode ter medida nula.

Para a genericidade entendida como densidade, vimos que a ferradura foi um contra-exemplo para a conjectura de que os sistemas Morse-Smale são genéricos. Mencionamos que há também alguns contra-exemplos para a conjectura de que os sistemas hiperbólicos são genéricos. Estes exemplos, que pareciam excepcionais, acabaram por se mostrar estáveis e apresentar um tipo de "estabilidade da instabilidade". Poderíamos falar, por isto, de um fracasso das conjecturas de classificação?

Preferimos dizer o contrário. Tais objetos fundaram novos métodos que engendraram outros objetos. A exceção pode ser entendida, neste caso, como uma medida da tensão entre o que descrevo e o que fica de fora. Certos objetos estáveis *resistem* a qualquer tentativa de classificação que os exclua e forçam o desenvolvimento da teoria. A caracterização dos sistemas Morse-Smale serviu para que delimitássemos o desconhecido, um *fora*, onde habitavam, por exemplo, os pontos homoclínicos.

Mas a partir daí, conhecemos os exemplos dos difeomorfismos de Anosov, dos quais o fluxo geodésico de Hadamard era um caso particular. O caso integrável, que era excepcional, se alarga: *sistemas globalmente hiperbólicos podem ser vistos como geometricamente integráveis.* Isto porque, como vimos, a abordagem qualitativa muda o sentido da palavra *solução.*

Se os candidatos à classificação dos comportamentos gerais se revelam excepcionais, este é um belo exemplo da natureza dinâmica do movimento das idéias matemáticas. Reencontramos inúmeras vezes, na história da matemática, uma situação parecida. Considerando os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, ou a descoberta dos incomensuráveis, Cavaillès já pontuava que:

"*Ici comme ailleurs la nécessité dialectique se masque sous un échec, l'experience nouvelle n'est donnée que par un effort positif d'authentique aperception*".

O movimento de generalização é bastante poderoso no nascimento de uma nova teoria, mas ele é um *movimento.* A exceção esconde uma tensão mais profunda que é o índice da urgência dos problemas que, como dizia Lautman, constituem o único *a priori* da matemática. Afirmar esta tensão e compreender as sínteses que ela engendra é um modo afirmativo de se aproximar do pensamento matemático.

Um fato excepcional, como um contra-exemplo, em particular, os exemplos de que falamos neste capítulo, não são "falha", ou como um "erro", das conjecturas de classificação. Mesmo quando ele se integra a uma nova teoria, ele insiste no contexto em que está incluído, deixando-se entrever sob novos recortes. Dieudonné já havia denunciado falsas oposições em matemática que escondem tensões mais profundas. Por exemplo, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo, o local e o global, a álgebra e a análise, o comutativo e o não comutativo. Ele conclui, em seu prefácio ao livro de Lautman(DIEUDONNÉ, 1977), que estas oposições são aparências superficiais que, de fato, mascaram *pólos de tensão* no seio da matemática. De tal tensão, emanam os mais notáveis progressos em matemática.

A matemática não se constitui apenas da teoria matemática, mas de fatos e objetos matemáticos que oferecem uma resistência ao esquema teórico que tenta abarcá-los. Desta resistência pode nascer uma nova teoria e é neste sentido que defendemos uma realidade propriamente matemática. Da inesgotabilidade deste processo, garantimos a inesgotabilidade da matemática e a irredutibilidade desta matemática a uma extensão unificada e progressiva de teorias. Esta é também uma afirmacão de Lautman, ao insistir sobre o papel dos problemas em matemática tal como o descrevemos no quinto capítulo.

Seria infeliz uma tentativa de classificação que desse certo imediatamente, sem descortinar novos objetos, inesperados. Um momento de gênese se mascara em uma falha, em um erro ou em um comportamento excepcional. Poincaré sintetiza em uma bela frase o que procuramos esboçar:

"A elegância pode provir do sentimento do imprevisto, pelo encontro inesperado de objetos dos quais não estamos acostumados a nos aproximar.

(...)

Para obter um resultado que tenha um valor real, não basta colocar as coisas em ordem. Não é apenas a ordem, é a ordem inesperada que vale alguma coisa".

À GUISA DE CONCLUSÕES

Não pretendemos, nesta conclusão, analisar os capítulos anteriores, visando qualquer espécie de síntese. Nosso objetivo é confessar, neste momento, as motivações filosóficas que acompanharam todo o desenrolar do texto. Falamos de Leibniz; convocando-o iniciamos, e terminaremos esta tese.

Em primeiro lugar, faremos uma breve crítica ao problema do determinismo, a partir da qual seremos levados a substituí-lo por um problema de uma outra natureza: a determinação. Um problema de determinação que aparece da filosofia de Leibniz, onde o cálculo diferencial tem um papel constitutivo. Por este motivo, ao falarmos de equações diferenciais, incluímo-nos diretamente nesse pensamento, sem precisar passar por nenhuma relação exterior, seja ela analógica ou metafórica.

Tentaremos identificar, em seguida, como a análise qualitativa das equações diferenciais participa da determinação e, principalmente, em que ponto ela se insere. Retornaremos, na verdade, àquilo que foi nossa questão desde o início: a introdução do pensamento qualitativo. A partir daí, não nos estenderemos muito mais nesta conclusão, pois a continuação remete ao nascimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos e, portanto, à própria tese que acabamos de escrever.

Raríssimas vezes, ao longo deste trabalho, tocamos no problema do determinismo. Mesmo tendo tratado da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, onde aparecem os comportamentos ditos "caóticos", que parecem fundar uma bifurcação entre o postulado do determinismo e a previsibilidade. Há uma razão para esta escolha.

Muito já se disse sobre este assunto, partindo quase sempre do célebre enunciado de Laplace, que atribui a uma inteligência superior, que conhecesse as forças que animam a natureza e a situação dos seres, a completa inteligibilidade do mundo. Isto porque, neste mundo, os estados sucessivos do universo seriam causados progressivamente, o posterior pelo anterior. Ou seja, o universo é "determinista" e não regido pelo acaso. Laplace não emprega a palavra "determinismo" e não é suficientemente claro, nesta descrição do problema, a que se atribui o princípio de determinação. Expresso na pena do autor, lemos somente *causalidade*.

Talvez para resolver este problema, identifica-se freqüentemente, ao postulado de

Laplace, o teorema de existência e unicidade para as soluções das equações diferenciais[68]. Deste modo se esclarece que o princípio causal é expresso por uma equação diferencial— protótipo das leis da natureza— e que o determinismo se associa, mais especificamente, à garantia de que existe uma e apenas uma solução desta equação por cada condição inicial. Conhecendo-se, então, as condições iniciais com toda a precisão necessária, seu passado e seu futuro estariam completamente determinados.

Esta precisão, fornecida pelo teorema de existência e unicidade, não está contida, evidentemente, no enunciado de Laplace. Laplace era leitor de Leibniz e, em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, ele insere a célebre citação, após o seguinte parágrafo:

"Os acontecimentos atuais têm com os precedentes uma ligação fundada sobre o evidente princípio de que uma coisa não pode começar a ser sem que uma causa a produza. Este axioma, conhecido pelo nome de *princípio da razão suficiente*, se estende às próprias ações que julgamos indiferentes. A vontade mais livre não pode, sem um motivo determinante, fazê-las nascer; pois se, todas as circunstâncias de duas posições sendo semelhantes exatamente, ela agisse sobre uma e se abstivesse de agir sobre a outra, sua escolha seria, com efeito, sem causa: ela seria então, diz Leibniz, o acaso cego dos epicuristas. A opinião contrária é uma ilusão do espírito que, perdendo de vista as razões fugitivas da escolha da vontade nas coisas indiferentes, se convence de que ela se determinou por si mesma e sem motivos"[69].

A motivação de Laplace, que ele irá reiterar no parágrafo subseqüente, é afirmar o princípio da razão suficiente e encontramos, no trecho acima, explicitamente, a menção ao fato de que as coisas são *determinadas* por causas. Sabemos porém que, ainda que ele tenha se servido da filosofia leibniziana, as preocupações de Laplace não eram propriamente filosóficas, mas serviam a uma justificativa de sua teoria

[68]Que analisamos no primeiro capítulo.

[69]"Les événements actuels ont avec les précédents une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être, sans une cause qui la produise. Cet axiome, connu sous le nom de **principe de la raison suffisante**, s'étend aux actions mêmes que l'on juge indifférentes. La volonté la plus libre ne peut sans un motif déterminant leur donner naissance; car si, toutes les circonstances de deux positions étant exactement semblables, elle agissait dans l'une et s'abstenait d'agir dans l'autre, son choix serait en effet sans cause: elle serait alors, dit Leibniz, le hasard aveugle des épicuriens. L'opinion contraire est une illusion de l'esprit qui, perdant de vue les raisons fugitives du choix de la volonté dans les choses indifférentes, se persuade qu'elle s'est determinée d'elle-même et sans motifs"(LAPLACE, 1986, p.32).

das probabilidades[70]. Recorremos assim a Leibniz, para lembrar que seus escritos faziam questão de afirmar que o princípio da razão suficiente não é um princípio de causalidade. É verdade que a razão suficiente deve se encontrar nas coisas que, de fato, povoam o universo. Mas a variedade infinita destas coisas pode nos levar longe demais na busca de razões cada vez mais particulares e detalhadas:

"Há uma infinidade de figuras e movimentos presentes e passados entrando na causa eficiente deste meu ato presente de escrever (...). E, como todo este pormenor (*détail*) só implica outros contingentes anteriores que podem ser mais pormenorizados, cada qual necessitando, ainda, de análise semelhante para encontrar sua razão, nada se adianta por este caminho, e é preciso que a razão suficiente ou última esteja fora da seqüência ou *séries* deste pormenor (*détail*) das contingências, mesmo que a seqüência seja infinita"(LEIBNIZ, 1974a, p.66 e 67).

A questão de Leibniz é, com efeito, inversa a de Laplace. Não se trata de supor a impossibilidade do conhecimento das causas e fundar uma teoria baseada em tal ignorância; mas não se trata, tampouco, de remontar das coisas às suas causas. É preciso saber como a razão suficiente se propulsa em direção à existência das coisas.

O determinismo sai de cena para dar lugar ao problema da determinação. Tal é a razão da escolha que permeou nossa tese, a de não discutir as idéias de causalidade, determinismo e previsibilidade. Mesmo que estas questões possam ser pertinentes quando falamos de matematização dos fenômenos físicos, elas se tornam dispensáveis ao nos concentrarmos sobre *a gênese das idéias matemáticas*.

Nosso objeto principal, nesta tese, foram as equações diferenciais e a atribuição de um novo sentido para a *resolução* destas equações. Afirmamos, inspirados por Leibniz, que uma equação diferencial estabelece as condições para a gênese de um novo ser matemático (solução), a partir de uma relação diferencial.

Ao falar do problema de quadraturas, Leibniz observa que alguns métodos nos permitem antecipar resultados desconhecidos, deixando-nos raciocinar sobre suas condições de possibilidade sem que encontremos verdadeiramente *soluções*. Por outro

[70]Em um texto profundo, onde distingue as noções de *razão* e de *causa*, Cournot questiona a própria concepção do que é o acaso para Laplace, observando que o objetivo da teoria das probabilidades fundada por este último, é o de tornar as aplicações mais seguras, desprezando a investigação dos graus de independência ou de solidariedade entre os fenômenos. Ver (COURNOT, 1843), especialmente "*De la distinction entre l'idée de raison et l'idée de cause— de la définition du hasard*".

lado, tal constatação tem como contrapartida o fato de que o acabamento do cálculo explicito pode ser muitas vezes inútil[71]. Podemos ter informações substanciais quanto à possibilidade ou impossibilidade de uma quadratura sem resolvê-la, deduzindo-as do conhecimento de uma relação(ou razão), sem conhecer o valor dos termos que a compõem.

As diferenciais podem determinar algo, para Leibniz, quando entram em relação. A razão $\frac{dy}{dx}$ é uma relação que possui uma natureza distinta dos objetos que a constituem. Esta observação é muito importante na obra de Leibniz, pois as diferenciais dx e dy são indeterminadas, admitindo-se que elas não derivam das quantidades variáveis x e y. Se as diferenciais fossem definidas a partir das quantidades variáveis primeiras, x e y, elas se reduziriam a um nada, posto que as diferencias se anulariam como quantidades variáveis infinitamente pequenas.

Origina-se neste ponto a freqüente incompreensão da inseparabilidade da obra matemática e da obra filosófica de Leibniz. O infinitamente pequeno não indica contradição alguma se invertemos as prioridades, como Leibniz, afirmando que as diferenciais são indeterminações primeiras em relação às quantidades variáveis ordinárias.

Livres do atrelamento às variáveis x e y, as diferenciais dx e dy podem entrar em relação. Por esta razão podemos dizer que a relação entre as diferenciais tem uma realidade independente dos termos que a compõem. De um país qualquer, tomado ao acaso e habitado por seres humanos, podemos dizer que o número de olhos é o dobro do número de narizes. Mesmo se não sabemos o que é *o dobro*, esta relação pode ser afirmada independentemente dos olhos e dos narizes, ou do número de olhos e narizes. Podemos dizer, de outro modo, que a realidade da razão é independente e distinta da realidade do número natural, associada freqüentemente à contagem.

O caso da diferencial $\frac{dy}{dx}$ é análogo, porém deveras mais profundo. A relação diferencial dá origem aos termos que relaciona. Como já dissemos, diferentemente do caso das bocas e dos narizes, as quantidades variáveis não são primeiras em relação à diferencial. Ao contrário, a relação diferencial é a responsável pela gênese destas quantidades, motivo pelo qual esta relação se torna mais evidentemente real: por gerar as quantidades variáveis. Ainda que sua realidade não esteja no mesmo domínio que

[71] Referimo-nos aos capítulos 1 e 7 para a análise da situação análoga no problema das equações diferenciais.

os objetos que relaciona, uma vez que habita o campo do possível.

Ora, quando escrevemos uma equação diferencial e associamos uma relação entre diferenciais a uma função, estabelecemos como a relação entre as variáveis se associa às próprias variáveis. Temos, portanto, um princípio de determinação que associa duas realidades distintas: a das relações diferenciais e a das variáveis.

No domínio das variáveis, o teorema de existência e unicidade nos diz *sob que condições* garantimos que todas as soluções de uma equação diferencial estão bem determinadas: existem e são únicas para cada condição inicial. Trata-se, portanto, de um teorema de determinabilidade da solução de uma equação diferencial.

Leibniz atribui um significado especial a palavra *determinação*, relacionando-a a um problema. Quando investigamos uma relação sem dar atenção aos termos que a compõem, raciocinamos sobre as condições de determinação de um problema. A equação diferencial seria, portanto, um problema que é determinado (como problema) por associar uma instância ideal (relação) a uma função. Intrincadas na equação diferencial, destacam-se três camadas: a relação determinável entre diferenciais indeterminadas; a determinação do problema através de uma equação diferencial; a solução determinada que é a solução da equação diferencial.

Estas três camadas se associam diretamente às três instâncias do problema, tal como elas são postuladas por Lautman e descrevemos no quinto capítulo[72]. Ao insistirmos sobre a primazia dos problemas como instauradores do progresso em matemática, aproximamo-nos novamente da posição de Leibniz. Yvon Belaval, em sua análise da discussão entre Leibniz e Descartes, afirma que, longe de conceber a questão do progresso ou como resolvível ou como antinômica, Leibniz a pensa sob o modo problemático:

"Leibniz trata de conciliar as duas teses: o mundo é ao mesmo tempo acabado e por acabar"[73].

Esta afirmação está associada às equações diferenciais, cuja análise qualitativa foi objeto de nossa tese. Na visão qualitativa sobre as equações diferenciais, da qual

[72]A participação da instância *problema* no desdobramento da determinação é um ponto fundamental da filosofia de Gilles Deleuze, conforme (DELEUZE, 1988, Cap.III e IV). Em um texto sobre a obra de Albert Lautman, Jean Petitot observa que Deleuze é um dos raros filósofos que se deu conta da importância desta obra(PETITOT, 1987).

[73]"*Leibniz tâche (...) de concilier les deux thèses: le monde est à la fois achevé et inachevable*"(BELAVAL, 1960, p.273).

falamos das origens e preceitos, temos informações importantes sobre as soluções, analisando apenas o problema dado por uma equação diferencial. Problema que inclui as condições de que necessita para a obtenção de *soluções*, não necessariamente analíticas.

Está em jogo, nos métodos qualitativos, uma questão relativa à determinação: determinação do problema e determinação da solução, a partir de suas condições dadas no problema. Interrogamos, nesta conclusão, como os métodos qualitativos se inserem no esquema de determinação, tal como acabamos de descrevê-lo.

O teorema de existência e unicidade, além de estabelecer as condições da determinação, determina efetivamente as soluções no âmbito local. Partindo de métodos semelhantes, vimos, no segundo capítulo, como a determinação local foi bem resolvida na vizinhança das singularidades, tendo estabelecido os casos em que descrevemos as soluções por tal ou tal modo de descrição. Modos que podem construir efetivamente as soluções quando as condições impõem uma grande rigidez de estrutura, ou ainda classificá-las topologicamente, aproximando-nos mais de esquemas de gênese que de esquemas de estrutura.

Tomando a equação diferencial (condições do problema), era preciso, a princípio, determinar efetivamente as soluções como integrais, o que resolveria o problema globalmente ao modo de quadraturas. Dada a impossibilidade deste método, procurou-se determinar as soluções por séries que as aproximariam, sendo a precisão infinita desta aproximação garantida pela convergência das séries. No entanto, mencionamos, por exemplo no capítulo 7, que estas séries, na maioria dos casos, não convergem, o que traz profundas conseqüências. Não apenas não podemos garantir a convergência, como atestou-se a inutilidade de soluções convergentes para fornecer informações qualitativas que se tornaram essenciais; constatação que já estava presente na observação de Leibniz sobre as quadraturas. Ao passarmos à determinação global, em dimensões maiores que dois, o problema se complica consideravelmente. Vimos, nos capítulos 3 e 4, como demos os primeiros passos para penetrar no global e, no capítulo 8, tivemos uma idéia da insistência dos comportamentos inesperados que foram encontrados.

Dissemos que a equação diferencial é completamente determinada como problema, uma vez que estabelece as condições do problema. Sobre as soluções, precisamos saber como se determinam a partir de tais condições. O teorema de existência e unicidade é um princípio de determinabilidade que estabelece as condições de determinação das soluções. Deste princípio, se originam as tentativas de solução por séries, mas não atingimos, deste modo, a generalidade desejada na descrição das soluções das equações diferenciais.

A análise qualitativa parte de um retorno às condições do problema para instaurar, a partir daí, novas condições de determinabilidade para as soluções. Não esqueçamos que o primeiro passo de Poincaré em direção aos métodos qualitativos foi a consideração do conjunto de soluções como um todo e a demonstração de propriedades deste conjunto, propriedades que estão na origem da definição de um sistema dinâmico como um fluxo.

Ou seja, as condições do problema fornecem as condições de resolubilidade que são, por sua vez, distintas, para cada maneira diferente de se conceber a palavra *solução*. Os casos de solução já estão presentes no problema, em potência; resolver é atualizar tais potencialidades. De modo fiel à natureza do problema, na sua qualidade de ser *determinável*.

Leibniz acreditava que os seres tendem sempre a existência pelo caminho da maior determinação. Mas a determinação não é quantitativa. No caso da procura de máximos e mínimos no Cálculo Diferencial, a partir de um mesmo método, encontramos indistintamente o maior ou o menor. Um extremo é sempre o mais determinado, não importando seu valor, mas sua natureza. Para Leibniz, a determinação não é quantitativa, mas sempre qualitativa.

Uma teoria é tanto mais acabada, quanto mais ela permite antecipar resultados desconhecidos. Em sua introdução à publicação do livro *Naissance du calcul différentiel*, reunindo diversos artigos de Leibniz, Marc Parmentier descreve a importância que tinha, para Leibniz, o método de séries indeterminadas, exatamente por permitir antecipar resultados desconhecidos e refletir sobre suas condições de possibilidade, "tornando inteiramente inúteis, em certos casos, a conclusão explícita dos cálculos"[74].

Desde as justificações da abordagem qualitativa, faz-se presente o seu talento para

[74] "*Rendant tout bonnement inutile dans certains cas l'achèvement explicite des calculs*" (LEIBNIZ, 1989, p.49).

entrever seus próprios limites e as condições de possibilidade de seus resultados, sem necessidade do cálculo efetivo das soluções. Mais do que isso, a descrição qualitativa é considerada uma solução, bem determinada qualitativamente, e este é o fundamento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Operando diretamente sobre o determinável (o problema), o advento da teoria qualitativa testemunha a irredutibilidade do potencial ao atual. Extrai-se deste enunciado o sentido em que afirmamos, ao longo deste trabalho, uma realidade para a matemática. Para falar desta realidade, mencionamos, entre outros, o pensamento de Cavaillès e de Lautman; a resistência dos seres matemáticos; a persistência das tensões e dos problemas em matemática; o movimento de pensamento expresso por um gesto.

Vimos que, em Leibniz, também se faz presente a afirmação de que a matemática é real. Real do modo como são reais as relações diferenciais, ou seja, como relações. Citamos uma outra vez a bela introdução de Parmentier, quando este afirma, sobre as diferenciais, que estas são "seres anfíbios de duas faces, cujo anverso é quantitativo, mas o reverso é a face cega que elas apresentam às regras e às operações do cálculo"(LEIBNIZ, 1989, p.39).

Sua face operatória é a única face visível, dando lugar, no mundo, a relações efetivas entre seres que ocupam os mesmos papéis daqueles que compõem as relações potenciais, e que habitam a face cega.

Ao invés de percebermos a criação sob o regime do empírico, investigamos como o empírico se fundamenta e se determina. A matemática não pode ser concebida a partir do empírico, sobretudo porque ela não possui os traços do sensível. A partir desta inversão, é possível introduzir, de outro modo, a questão sobre a participação da matemática no mundo empírico e pensar, por conseguinte, sua mistificada relação com a física. Analisamos, na segunda parte de nossa tese, a questão da estabilidade e o modo problemático como ela se insere entre física e matemática.

Quando dizemos que a matemática se *aplica* à física, estão implícitos dois preconceitos: a matemática fornece uma *linguagem* para a física que, por sua vez, oferece uma possibilidade de realização efetiva para os objetos abstratos da matemática. Esta concepção é prejudicial para ambas. Por um lado, a matemática se esvazia como um jogo lógico abstrato que precisa da física para ganhar realidade. Mas, por outro lado, a física é negada como saber incompetente para constituir um modo de falar de si mesmo[75].

É preciso pensar o físico-matemático como tal, afirma Gilles Châtelet, denunciando, como herança aristotélica, a subordinação ontológica da mobilidade das coisas sensíveis a indeterminações abstratas:

"Pode-se conceber seres físico-matemáticos que não sejam irremediavelmente subjugados aos apetites do mundo, sem fazer deles figuras abstratas fadadas a existir por procuração?"(CHÂTELET, 1993).

Conceber a matemática como reserva de *modelos* para o conhecimento do mundo, significa negar, ao mesmo tempo, a física e a matemática. Por este motivo, pouco falamos de problemas derivados da Teoria dos Sistemas Dinâmicos que se associam aos limites da modelização. Por exemplo, a sensibilidade às condições iniciais, usualmente associada à dificuldade de previsão. Os sistemas expansivos, que possuem esta propriedade, são, em princípio, previsíveis e a expansividade mede o custo de uma previsão razoável. Trata-se, portanto, de um problema prático.

Mas, como afirma René Thom, "*prédire n'est pas expliquer*"(THOM, 1991). Explicar não é prever tampouco. Nem perseguir uma seqüência de causas indefinidamente detalhadas.

Na evidência de uma certa situação ou de um certo fenômeno, um movimento de pensamento é forçado a dar as costas para as circunstâncias explícitas, para sair em busca de suas razões. Do contrário, imersos no sensível, seríamos tentados pela aceitação das evidências superficiais e não constituiríamos ciência alguma.

A partir de um estado de coisas, uma experiência de pensamento tem lugar, como propõe Châtelet, ao procurar o gesto que permitiu a determinação. O elemento físico-matemático que este filósofo propõe se situa no próprio desenrolar da determinação e a resposta se aproxima, mais uma vez, da filosofia de Leibniz[76].

Defendemos, ao final, a dupla irredutibilidade da matemática: ao mundo sensível

[75]Para uma análise deste problema, de um ponto de vista físico, indicamos o livro de Lévy-Léblond(LÉVY-LEBLOND, 1982). O autor afirma que a física possui, com a matemática, uma relação de *constituição*, que não pode ser reduzida a uma relação *instrumental*, ou de *aplicação*.

[76]É como se a matemática incluísse intrinsecamente uma física e, talvez, seja esta a razão do bem sucedido casamento entre a matemática e a física.

e às idéias abstratas. Irredutibilidade esta que é a condição de possibilidade do pensamento, inclusive, do próprio sensível.

Renunciamos à aceitação do empírico como tal, mas ao mesmo tempo, enquanto procurarmos explicar o sensível, móvel e cambiante, por idéias abstratas e fixas, não compreenderemos a determinação. Por este motivo, os possíveis não bastam por si mesmos, é preciso que eles tendam à determinação. Tal é o momento genético associado à razão suficiente: a potencialidade requer uma determinação.

Referências

ABRAHAM, A., ROBBIN, J. 1967. *Transversal mappings and flows.* NY, Benjamim.

ANDRONOV, A. 1929. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. *Comptes Rendus de l Académie des Sciences de Paris,* **189**, pp. 559–561.

ANDRONOV, A., PONTRYAGIN, L. 1937. Systèmes Grossiers. *Doklady Akademi Nauk SSSR*, **14**(5), pp. 247–250.

ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. 1949. *Theory of Oscillations.* Princeton, Princeton University Press. Trad. N. Goldskaja, Ed. Solomon Lefschetz.

ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. 1966. *Theory of Oscillators.* Oxford, Pergamon Press. Trad. F. Immirzi.

ANOSOV, D. V. 1962. Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Soviet Math. Dokl.*, **3**, pp. 1068–1070. Trad. do original em russo.

ANOSOV, D. V. 1967. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90**, pp. 1–235. Trad. do original em russo.

ANOSOV, D. V. 1986. Structurally Stable Systems. *Proceedings os the Steklov Institute os Mathematics*, **4**, pp. 61–95.

APÉRY, R. ET AL. 1982. *Penser les mathématiques.* Points Sciences. Paris, Seuil.

ARNOLD, V. I. 1980. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires.* Moscou, MIR.

ARNOLD, V. I. 1983. *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* NY, Springer-Verlag.

AUBIN, D. 1998. *A Cultural History of Catastrophes and Chaos: around the "Institut des Hautes Etudes Scientifiques", France.* Doctoral Thesis, Princeton University.

BAMFORTH, F. R., BIRKHOFF, G. D. 1930. Divergent Series and singular points of ordinary differential equations. In: (BIRKHOFF, 1950), t.1, pp. 440-472.

BARROW-GREEN, J. 1997. *Poincaré and the Three Body Problem.* Providence, American Mathematical Society. London Mathematical Society.

BELAVAL, Y. 1960. *Leibniz, critique de Descartes.* Paris, Gallimard.

BENDIXSON, I. 1901. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, **24**, pp. 1–88.

BERNOULLI, D. 1747(1738). Commentationes de Statu Aequilibri corporum humido insidentium. *Antigas memórias de São Petesburgo*, **10**, pp. 147–163.

BIRKHOFF, G. D. 1912. Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **40**, pp.305–323. In: (BIRKHOFF, 1950) t.1, pp. 654-672.

BIRKHOFF, G. D. 1913. Proof of Poincaré's Geometric Theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, **14**, pp. 14–22. In: (BIRKHOFF, 1950) t.1, pp. 673-681.

BIRKHOFF, G. D. 1917. Dynamical Systems with two Degrees of Freedom. *Transactions of the American Mathematical Society*, **18**, pp. 199–300. In: (BIRKHOFF, 1950), t. 2, pp. 1-102.

BIRKHOFF, G. D. 1920a. Recent Advances in Dynamics. *Science (N.S.)*, **51**(1307), pp.51–55. In: (BIRKHOFF, 1950) t.2, pp. 106-110.

BIRKHOFF, G. D. 1920b. Surface Transformations and their Dynamical Applications. *Acta Mathematica*, **43**, pp. 1–119. In: (BIRKHOFF, 1950) t.2, pp. 111-129.

BIRKHOFF, G. D. 1925. An extension of Poincaré's Last Geometric Theorem. *Acta Mathematica*, **47**, pp. 297–311. In: (BIRKHOFF, 1950), t. 2, pp. 252-266.

BIRKHOFF, G. D. 1926. Über gewisse Zentralbewegungen dynamischer Systeme. *Ges. d. Wiss. Nachrichten.* In: (BIRKHOFF, 1950), t. 2, pp. 283-294.

BIRKHOFF, G. D. 1927a. *Dynamical Systems.* Providence, American Mathematical Society. Reimpresso em 1966 com prefácio de Marston Morse e introdução de Jürgen Möser.

BIRKHOFF, G. D. 1927b. Stability and the Equations of Dynamics. *American Journal of Mathematics*, **49**, pp. 1–38. In: (BIRKHOFF, 1950), t. 2, pp. 295-332.

BIRKHOFF, G. D. 1929. Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differential-gleichungen. *Sonderabdauck aus Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **11**, pp. 1–15. In: (BIRKHOFF, 1950), t. 1, pp. 425-439.

BIRKHOFF, G. D. 1931. Une généralisation à n dimension du dernier théorème de géométrie de Poincaré. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **192**, pp. 196–198. In: (BIRKHOFF, 1950), t. 2, pp. 395-397.

BIRKHOFF, G. D. 1932. Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **30**, pp. 1–26. In: (BIRKHOFF, 1950) t.2, pp. 418-443.

BIRKHOFF, G. D. 1935. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei*, **1**(3), pp.65–216. In: (BIRKHOFF, 1950) t.2, pp. 530-661.

BIRKHOFF, G. D. 1941. Some unsolved problems of theoretical dynamics. *Science (N.S.)*, **94**(2452), pp. 598–600. In: (BIRKHOFF, 1950), t.2.

BIRKHOFF, G. D. 1943. The Mathematical Nature of Physical Theories. *American Scientist*, **31**, pp. 281–310. In: (BIRKHOFF, 1950) t.2, pp. 890-919.

BIRKHOFF, G. D. 1950. *Collected Mathematical Papers*. Providence, American Mathematical Society. Republicado em 1968, Dover, NY.

BIRKHOFF, G. D., LEWIS, D. C. 1935. Stability in Causal Systems. *Philosophy of Science*, **2**(3), pp.304–333.

BOS, H. J. M. 1974. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, **14**, pp. 1–90.

BOURBAKI, N. 1960. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, Herman.

BOUTROUX, P. 1920. *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes*. Paris, Félix Alcan. Reimpresso por Éditions Jacques Gabay em 1992.

BRÉHIER, É. 1955a. *La notion de problème en philosophie. In:*(BRÉHIER, 1955b). Traduzido para o português por Silvia Aguiar.

BRÉHIER, É. 1955b. *Les études de philosophie antique*. Paris, PUF.

BRIOT, Ch., BOUQUET, J. 1856. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. *Journal de l'École Polytechnique*, **21**, pp. 133–198.

BROUWER, L. E. J. 1912. Uber Abbildung der MannigfaltigKeiten. *Math. Annalen*, **71**, pp. 97–115.

BROWDER, F. E. (ed). 1980. *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré. Indiana Symposium*. Providence, American Mathematical Society.

BROWDER, F. E. 1981. Fixed Point Theory and Nonlinear problems. *In:* (BROWDER, 1980).

BRUNSCHVICG, L. 1922. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Félix Alcan.

CANTOR, G. 1879. Über unen dliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, **15**, pp. 1–7.

CANTOR, G. 1880. Idem. *Mathematische Annalen*, **17**, pp. 355–358.

CANTOR, G. 1882. Idem. *Mathematische Annalen*, **20**, pp. 113–121.

CANTOR, G. 1883a. Idem. *Mathematische Annalen*, **21**, pp. 51–58 e pp. 545–586.

CANTOR, G. 1883b. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. *Acta mathematica*, **2**, pp. 349–414.

CARTWRIGHT, M. L., LITTLEWOOD, J. E. 1945. On non-linear differential equations of the second order: The equation $y''-k(1-y^2)y'+y = b\lambda k\cos(\lambda t+a)$, k large. *Journal of the London Mathematical Society*, **20**, pp. 180–189.

CAUCHY, A.L. 1841a. Note sur la nature des problèmes qui présente le calcul intégral. *Exercises d'analyse et de physique mathématiques*. In: Œuvres complètes, t. 2, 12, pp.263-271.

CAUCHY, A.L. 1841b. Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. *Exercises d'analyse et de physique mathématiques*, **2**, pp. 41–98.

CAVAILLÈS, J. 1962. *Philosophie mathématique*. Paris, Hermann.

CAVAILLÈS, J. 1994. *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris, Hermann.

CESARI, L., LASALLE, J., LEFSCHETZ, S. 1960. *Contributions In The Theory Of Nonlinear Oscilations V*. Annals of Mathematics Studies, vol. 45. Princeton, Princeton University Press.

CHABERT, J.-L. 1992. *Hadamard et les géodésiques des surfaces à courbure négative*. *In:*(DAHAN DALMEDICO *et al.*, 1992). pp. 306–330.

CHABERT, J.-L., DAHAN DALMEDICO, A. 1992. *Les idées nouvelles de Poincaré. In:*(DAHAN DALMEDICO *et al.*, 1992). pp. 274–305.

CHAPERON, M. 1999. *Qu'est-ce que la stabilité structurelle? In:*(FRANCESCHELLI *et al.*, Em preparação).

CHÂTELET, G. 1993. *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie.* Paris, Éditions du Seuil.

CHEN, K. T. 1963. Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point. *Amer. J. Math.*, **85**, pp.693–722.

CHENCINER, A. 1985. Systèmes Dynamiques Différentiables. *Encyclopédia Universalis*, **XX**, pp. 594–630.

CHENCINER, A. 1999. *De la Mécanique céleste à la théorie des systèmes dynamiques, aller et retour: Poincaré et la géométrisation de l'espace des phases. In:*(FRANCESCHELLI *et al.*, Em preparação).

CHERN, S. S., SMALE, S. (eds). 1970. *Global Analysis. Proceedings Symp. Pure Math.* Vol. 14. American Mathematical Society.

CODDINGTON, E. A., LEVINSON, N. 1955. *Theory of Ordinary Differential Equations.* NY, McGraw-Hill.

COURNOT. 1843. *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* In: Œuvres, Vrin, Paris.

DAHAN DALMEDICO, A. 1994. La renaissance des systèmes dynamiques aux États-Unis après la Deuxième Guerre Mondiale: l'action de Solomon Lefschetz. *Rendiconti dei circolo matematico di Palermo (II)*, **34**, pp. 133–166.

DAHAN DALMEDICO, A., CHABERT, J.-L., CHEMLA, K. 1992. *Chaos et déterminisme.* Points Sciences. Paris, Seuil.

D'ALEMBERT, J. 1773. *Opuscules mathématiques.*

DE BAGGIS, H. F. 1952. *Dynamical systems with stable structures. In:*(LEFSCHETZ, 1952). pp. 37–59.

DELEUZE, G. 1988. *Diferença e Repetição.* Rio de Janeiro, Graal.

DELL'AGLIO, L., ISRAEL, G. 1989. La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielle ordinaires dans les mathématiques itallien-nes: le point de vue de Tullio Levi-Civita. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, **10**, pp. 283–321.

DENJOY. 1932. Sur les caractéristiques à la surface du tore. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **194**(830).

DIACU, F. 1996. The Solution of the *n*-body Problem. *The Mathematical Intelligencer*, **18**(3), pp. 66–70.

DIEUDONNÉ, J. 1977. *Avant-propos de (LAUTMAN, 1977). In:*(LAUTMAN, 1977). pp. 15–20.

DINER, S. 1992. *Les voies du chaos déterministe dans l'école russe. In:*(DAHAN DALMEDICO *et al.*, 1992). pp. 331–370.

DINER, S., FARGUE, D., LOCHAK, G. 1986. *Dynamical Systems: A Renewal Of Mechanism. Centennial Of George David Birkhoff.* Singapore, World Scientific.

DOBROVOLSKY, V. A. 1972. Sur l'histoire de la classification des points singuliers des équations différentielles. *Revue d'histoire des sciences*, **1**, pp.163–238.

DULAC, H. 1912. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **40**, 324.

DULAC, H. 1923. Sur les cycles limites. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **51**, pp. 45–188.

ÉCALLE, J., MARTINET, J., MOUSSU, R., RAMIS, J.-P. 1987. Non-accumulation de cycles limites. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **304**(14), pp. 375–378 e pp. 431–434.

EKELAND, I. 2000. *Le meilleur des mondes possibles: mathématique et destinée.* Paris, Seuil.

ENRIQUES, F. 1929. *Sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Bologna, Nicola Zanichelli.

FARUQUI, A. M., HASSAN, M. H. A. (eds). 1987. *Proceedings of the Sec. Gen. Conf. Third World Ac. Sci.* Beijing, World Scientific.

FRANCESCHELLI, S. 2001. *Construction de signification physique dans le métier de physicien: le cas du chaos déterministe.* Thèse de doctorat, Université Paris7.

FRANCESCHELLI, S., ROQUE, T. Les scénarios vers le chaos entre physique et mathématique: les systèmes dynamiques à l'œuvre dans l'étude de la turbulence. *Épistémologiques.* A ser publicado.

FRANCESCHELLI, S., ROQUE, T. 2000. La théorie des systèmes dynamiques et l'étude de la transition vers la turbulence. *Textes du séminaire "Histoires de Géométries" de l'année 1999. Maison des sciences de l'homme.*

FRANCESCHELLI, S., PATY, M., ROQUE, T. M. Em preparação. *Épistémologie des systèmes dynamiques.* CNRS Éditions.

FUCHS, L. I. 1880. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, **90**, pp. 678–680 e 735–736.

FUCHS, L. I. 1881. Sur les fonctions de deux variables qui naissent de l'inversion des intégrales des de deux fonctions données. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, **92**, pp. 1330–1331 e 1401–1403.

GILAIN, C. 1977. *La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'analyse.* Thèse de doctorat, Université de Paris7, Paris.

GILAIN, C. 1991. *La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles. In:*(GISPERT, 1991). pp. 215–242.

GISPERT, H. 1991. *La France mathématique. La Société mathématique de France (1872-1914).* Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques et Société mathématique de France.

GRAY, J. 1986. *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré.* Boston, Birkhäuser.

GROBMAN, D. M. 1959. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk URSS*, **128**, pp.880–881. Em russo.

GROBMAN, D. M. 1962. Topological classification of the neighborhood of a singular point in n-dimensional space. *Mat. Sb.*, **56**, pp.77–94. Em russo.

HADAMARD, J. 1897. Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. *Journal de mathématiques pures et appliquées (5)*, **3**, pp. 331–387. In: (HADAMARD, 1968), t.2,.

HADAMARD, J. 1898. Les surfaces à courbures opposés et leurs lignes géodésiques. *Journal de mathématiques pures et appliquées (5)*, **4**, pp.27–73. In: (HADAMARD, 1968), t.2, pp. 729-775.

HADAMARD, J. 1901. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **29**, pp. 224–228.

HADAMARD, J. 1912a. Le calcul fonctionnel. *L'Enseignement Mathématique*, pp. 1–18. In: (HADAMARD, 1968), t.4.

HADAMARD, J. 1912b. L'œuvre mathématique de Henri Poincaré. *Acta Mathematica*, **38**, pp. 203–287. In: (HADAMARD, 1968), t.4, pp. 1921-2005.

HADAMARD, J. 1933. The Later Scientific Work of Henri Poincaré. *The Rice Institut Pamphlet*, **20**, pp. 1–118.

HADAMARD, J. 1968. *Œuvres de Jacques Hadamard.* Paris, Éditions du CNRS.

HADAMARD, J., MANDELBROJT. 1926. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Paris, Gauthier-Villars.

HARTAMN, P. 1982. *Ordinary Differential Equations.* Boston, Birkhäuser. Segunda edição.

HARTMAN, P. 1960a. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**(jul), pp.610–622.

HARTMAN, P. 1960b. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **5**(jan), pp.220–241.

HARTMAN, P. 1963. On the local linearization of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**, pp.568–573.

HILBERT, D. 1900. Sur les problèmes futurs des mathématiques. *Comptes rendus du deuxième Congrès international des mathématiciens*, pp. 58–114. O original apareceu em alemão no *Göttinger Nachrichten* em 1900 e este texto, traduzido por L. Laugel, contém algumas modificações.

HILL, G.W. 1878. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, **1**(5), pp. 129–145.

HIRSCH, M. 1984. The Dynamical Systems approach to Differential Equations. *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.)*, **11**, pp. 1–64.

HIRSCH, M., SMALE, S. 1974. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* NY, Academic Press.

HIRSCH, M., PALIS, J., PUGH, C., SHUB, M. 1969-70. Neighborhoods of hyperbolic sets. *Invent. Math.*, **9**, pp. 121–134.

HIRSCH, M., PUGH, C., SHUB, M. 1970. Invariant Manifolds. *Bull. A.M.S.*, **76**, pp. 1015–1019.

HIRSCH, M., PUGH, C., SHUB, M. 1977. *Invariant Manifolds.* Lecture Notes in Mathematics 583. Springer-Verlag.

HIRSCH, M., MARSDEN, J. E., SHUB, M. (eds). 1993. *Proceedings of the Smalefest.* NY, Springer-Verlag.

HOLMES, P. 1990. Poincaré, Celestial Mechanics, Dynamical-Systems Theory and "Chaos". *Physics Reports*, **193**, pp. 137–163.

HOPF, E. 1942. Bifurcation of a periodic Solution from a Stationary Solution of a System of Differential Equations. *Berichten der Math.-Phys. Klasse des Säsc. Akad. der Wissen. zu Leipzig*, **94**, pp. 1–22. In: *The Hopf Bifurcation and Its Applications* (1976), ed. MARDSEN, J. E. e MCCRACKEN, M., Springer, NY.

HOPF, E. 1948. A Mathematical Exemple Displaying Features of Turbulence. *Communications on Applied Mathematics*, **1**, pp. 303–322. In: *Chaos*, ed. Hao Bai-Lin, 1984, pp. 112-118. World Scientific.

HOUZEL, C. 1979. *Euler et l'apparition du formalisme. In:*(HOUZEL *et al.*, 1979). pp. 123–156.

HOUZEL, C. (ed). 1985. *Rapport de prospective en mathématiques.* Paris, Éditions du CNRS.

HOUZEL, C., OVAERT, J.-L., RAYMOND, P., SANSUC, J.-J. 1979. *Philosophie et calcul de l'infini.* Paris, François Maspero.

IRWIN. 1970. On the Stable Manifold Theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **2**, pp. 196–198.

ISRAEL, G. 1996. *La mathématisation du réel.* Paris, Seuil.

JACOBI, C. G. J. 1834. Über die Figur des Gleichgewichts. *Ann. Phys. u. Chem. (2)*, **33**, pp. 229–233. In: *Mathematische Werke*, t.II, pp. 17-22.

JORDAN, C. 1870(1957). *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, Gauthier-Villars. Nouveau tirage.

JOUKOVSKY, N. E. 1876. Kinematika jidkogo tela (Cinemática dos corpos líquidos). *Matematish. Sbornik*, **8**, pp.1–79. Em russo.

KELLEY, A. 1967. *The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable manifolds. In:*(ABRAHAM & ROBBIN, 1967). Appendix C.

KLEIN, F. *Riemann et son influence sur les mathématiques modernes.* In: (RIEMANN, 1898), t.1, pp. xiii-xxxv.

KOEHLER, C. 1995. *Origens Históricas e Conceituais do Indeterminismo na Dinâmica Clássica.* Tese de doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

KOYRÉ, A. 1965a. *Attraction an Occult Quality? In:*(KOYRÉ, 1965c). Appendix B. pp. 139–148.

KOYRÉ, A. 1965b. *Gravity an Essential Property of Matter. In:*(KOYRÉ, 1965c). Appendix C. pp. 149–163.

KOYRÉ, A. 1965c. *Newtonian Studies.* Cambridge, Chapman-Hill.

KRONECKER, L. 1869. Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. *Monatsberichte Berlin Akad.*, março e agosto, pp. 159–193 e pp. 688–698.

LAGRANGE, J. (1788)1989. *Mécanique analytique.* Paris, Jacques Gabay.

LAGRANGE, J. L. 1772. Essai sur le problème des trois corps. In: (LAGRANGE, 1867-1892), t.6, pp.229-331.

LAGRANGE, J. L. 1773. Sur l'équation séculaire de la Lune. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris– Savants étrangers*, **7**. In : (LAGRANGE, 1867-1892), t.6, pp.335-399.

LAGRANGE, J. L. 1774. Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAGRANGE, 1867-1892), t.6, pp.635-709.

LAGRANGE, J. L. 1776. Sur l'altération des moyens mouvements des planètes. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.* In: (LAGRANGE, 1867-1892), t.4, pp.255-271.

LAGRANGE, J. L. 1781-1782. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.* In: (LAGRANGE, 1867-1892), t.5, pp.127-207 e pp.208-344.

LAGRANGE, J.-L. 1867-1892. *Œuvres de Lagrange.* Paris, Gauthier-Villars.

LAGRANGE, J, L. 1797. *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissements de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.* Paris, Impr. de la République.

LANDAU, L. 1944. On the Problem of Turbulence. *Doklady Academi Nauk SSSR*, **44**, pp. 311–314.

LAPLACE, P. S. 1773-1776. Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent. *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris– Savants étrangers*, **7**. In: (LAPLACE, 1878-1912), t.8, pp.201-275.

LAPLACE, P. S. 1775. Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.8, pp.325-366.

LAPLACE, P. S. 1775-1778. Recherches sur plusieurs points du système du monde. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.9, pp.71-310.

LAPLACE, P. S. 1776. Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.8, pp.369-501.

LAPLACE, P. S. 1784-1787. Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.11, pp.50-92.

LAPLACE, P. S. 1785-1788. Théorie de Jupiter et de Saturne. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.11, pp.93-239.

LAPLACE, P. S. 1787-1789. Mémoire sur les variations des orbites des planètes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris.* In: (LAPLACE, 1878-1912), t.11, pp.296-306.

LAPLACE, P.-S. 1796. *Exposition du système du monde.* Paris, Impr. du Cercle-Social. In: (LAPLACE, 1878-1912), t.6.

LAPLACE, P.-S. 1878-1912. *Œuvres complètes de Laplace.* Paris, Gauthier-Villars.

LAPLACE, P.-S. 1986. *Essai philosophique sur les probabilités.* Paris, Christian Bourgois Éditeur.

LASKAR, J. 1992. *La stabilité du système solaire. In:*(DAHAN DALMEDICO *et al.*, 1992). pp. 170–211.

LATTÈS, S. 1906. Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation. *Annali di Matematica Pura i Applicata*, **13**, pp. 1–138.

LAUTMAN, A. 1938. *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. In:*(LAUTMAN, 1977). pp. 23–154.

LAUTMAN, A. 1977. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits.* Paris, Union générale d'Éditions.

LE VERRIER, U.-J. 1856. *Annales de l'Observatoire de Paris.* Vol. 2. Paris, Mallet Bachelet.

LEFSCHETZ, S. 1952. *Contributions to The Theory Of Nonlinear Oscilations II.* Annals of Mathematics Studies. Princeton, Princeton University Press.

LEFSCHETZ, S. 1957. *Differential Equations: Geometric Theory.* NY, Interscience.

LEIBNIZ, G. W. 1694. Nova Calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicitem linearum constructionem ex data Tangentium conditione. *Acta Eruditorum.* In: (LEIBNIZ, 1989), pp. 268-281.

LEIBNIZ, G. W. 1850-1863. *Leibnizens mathematische Schriften.* Halle. Editado por C. I. GERHARDT.

LEIBNIZ, G. W. 1974a. *A Monadologia.* Vol. 9 of (LEIBNIZ, 1974b). pp. 61–73.

LEIBNIZ, G. W. 1974b. *Os Pensadores: Leibniz e Newton.* Vol. 9. São Paulo, Abril Cultural.

LEIBNIZ, G. W. 1989. *Naissance du calcul différentiel.* Paris, Vrin.

LEJEUNE-DIRICHLET. Sur la stabilité de l'équilibre.

LEVI-CIVITA, T. 1901. Sopra alcuni criteri di instabilità. *Annali di Matematica Pura i Applicata*, **5**, pp. 221–308.

LEVINSON, N. 1949. A second order differential equation with singular solutions. *Annals of Mathematics*, **50**, pp. 127–153.

LÉVY-LEBLOND, J.-M. 1982. *Physique et mathématiques. In:*(APÉRY, 1982). pp. 195–210.

LORENZ, E. N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**, pp. 130–141.

LOVETT, O. 1909. The Problem of Several Bodies— Recent Progress in its Solution. *Science*, **29**(733), pp. 81–91.

LUTZEN, J. 1984. Joseph Liouville's Work on the Figures of Equilibrium of a Rotating Mass of Fluid. *Archives for the History of Exact Sciences*, **30**(2), pp. 113–166.

LYAPUNOV, A. M. 1904. Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse (2)*, **6**, pp. 5–116.

LYAPUNOV, A. M. 1907. Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse (2)*, **9**, pp. 203–474. Tradução francesa por Edouard Davaux. Versão francesa reimpressa por Jacques Gabay, Paris, 1988.

MAC LAURIN, C. 1740. De causa physica fluxus et refluxus maris. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris.* Ensaio submetido ao prêmio.

MAWHIN, J. 1994. The Centennial Legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (II)*, **34**, pp. 9–46.

MISHCHENKO, E. F. 1999. A Few Words About L. S. Pontryagin And His Scientific Activity. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **224**, pp. 1–7.

MOREIRA, I. 1996. *Integrabilidade e Caos em Sistemas Físicos com Poucos Graus de Liberdade.* Tese de doutorado, IF-UFRJ, Rio de Janeiro.

MOREIRA, I. 1999. *Routes vers le chaos(1860-1880): Maxwell et Boussinesq. In:*(FRANCESCHELLI *et al.*, Em preparação).

MOUSSU, R. 1985. Le problème de la finitude de cycles limites. *Séminaire Bourbaki*, **1985**(exposé n. 655). Reimpresso em *Astérisque* 145-146, 1987, pp.89-101.

NAGUMO, M., ISÉ, K. 1957. On the normal forms of differential equations in the neighborhood of an equilibrium point. *Osaka Math. J.*, **9**, pp.221–234.

NEMYTSKII, V. V., STEPANOV, V. V. 1960. *Qualitative Theory of Differential Equations.* Princeton, Princeton University Press.

NEWTON, I. 1987. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Os Pensadores. São Paulo, Nova Cultural.

OVAERT, J.-L. 1979. *La Thèse de Lagrange et la transformation de l'analyse. In:*(HOUZEL *et al.*, 1979). pp. 157–200.

PALIS, J. 1969a. On Morse-Smale dynamical systems. *Topology*, **8**, pp. 385–405.

PALIS, J. 1969b. On the local structure of hyperbolic fixed points in Banach spaces. *Topology*, **8**, pp. 385–404.

PALIS, J. 1993. On the Contribution of Smale to Dynamical Systems. *In:* (HIRSCH *et al.*, 1993).

PALIS, J. 1997. *Entrevista realizada no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada)-RJ.*

PALIS, J., DE MELO, W. 1977. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,CNPq. Projeto Euclides.

PALIS, J., DE MELO, W. 1982. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* NY, Springer-Verlag.

PALIS, J., SMALE, S. 1970. Structural Stability Theorems. *In:* (CHERN & SMALE, 1970).

PALIS, J., TAKENS, F. 1993. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge, Cambridge University Press.

PATY, M. 1998a. *D'Alembert ou la raison physico-mathématique au siècle des Lumières.* Paris, Les Belles Lettres.

PATY, M. 1998b. Física e conhecimento humano. *Princípios*, **49**, pp. 74–77. Entrevista realizada por Cristiano Capovilla.

PATY, M. 1998-1999. La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré. *Philosophia Scientiae*, **3**(2), pp. 61–74.

PATY, M. 1999. La création scientifique selon Poincaré et Einstein. *In: La recherche de la vérité.* Serfati, M. (Ed.), ACL, Paris.

PATY, M. 2000. L'analogie mathématique au sens de Poincaré et sa fonction en physique. *In: Le statut de l'analogie dans la démarche scientifique.* Durand-Richard, M.-J. (Ed.), Éditions du CNRS, Paris.

PEIXOTO, M. 1959. On Structural Stability. *Annals of Mathematics*, **69**, pp. 199–222.

PEIXOTO, M. 1960. Structural Stability on Two-dimensional Manifolds. *Boletín de la Sociedad matemática mexicana*, **5**, pp. 188–189. In: *Proceedings of the Symposium on Ordinary Differential Equations and their Applications*, Universidad nacional Autónoma de México, 1959.

PEIXOTO, M. 1962. Structural Stability on Two-dimensional Manifolds. *Topology*, **1**, pp. 101–120.

PEIXOTO, M. 1987. Acceptance Speech for the TWAS 1986 award in mathematics. *In:* (FARUQUI & HASSAN, 1987).

PEIXOTO, M. 2000. *Entrevista realizada no IMPA*.

PETITOT, J. 1987. Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman. *Revue d'histoire des sciences*, **40**, pp. 79–115.

POINCARÉ, H. 1879. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux dérivées partielles. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t. 1, pp. 49-132.

POINCARÉ, H. 1880. Extrait d'un mémoire inédit de Henri Poincaré sur les fonctions Fuchsiennes. *Acta Mathematica (1923)*, **39**, pp. 58–93. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.1, pp. 578-613.

POINCARÉ, H. 1881. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1^re^ partie). *Journal de Mathématiques (3^e^ série)*, **7**. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.I, pp. 3-44.

POINCARÉ, H. 1882. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (2^e^ partie). *Journal de Mathématiques (3^e^ série)*, **8**. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.I, pp. 44-84.

POINCARÉ, H. 1883. Sur certaines solutions particulières du problème de trois corps. *Bulletin Astronomique*, **1**, pp.63–74. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t., pp.

POINCARE, H. 1884. Sur les groupes des équations linéaires. *Acta Mathematica*, **4**, pp. 201–311. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.2, pp. 300-401.

POINCARÉ, H. 1885a. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (3^e^ partie). *Journal de Mathématiques (4^e^ série)*, **1**. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.I, pp. 90-158.

POINCARÉ, H. 1885b. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*, **7**, pp.159–380. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.7, pp. 40-140.

POINCARÉ, H. 1885c. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. *American Journal of mathematics*, **7**, pp. 1–56. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.1, pp. 225-289.

POINCARE, H. 1885. Sur un théorème de M. Fuchs. *Acta Mathematica*, **7**, pp. 1–32. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.3.

POINCARÉ, H. 1886a. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (4^e partie). *Journal de Mathématiques (4^e série)*, **2**. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.I, pp. 167-222.

POINCARÉ, H. 1886b. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta mathematica*, **8**, pp. 295–344. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.1, pp. 290-332.

POINCARÉ, H. 1887. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, réponse a M. Thomé. *Acta Mathematica*, **10**, pp. 310–312. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.1, pp. 333-335.

POINCARÉ, H. 1889. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Não publicado.

POINCARÉ, H. 1890. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, **13**, pp. 1–270. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t. 7, pp. 262-479.

POINCARÉ, H. 1891. Le problème des trois corps. *Révue générale des Sciences*, pp. pp. 1–5.

POINCARÉ, H. 1892-1899. *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris, Gauthier-Villars.

POINCARÉ, H. 1895. Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*, **1**, pp.1–121. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.6, pp. 193-288.

POINCARÉ, H. 1898. Sur la stabilité du système solaire. *Révue scientifique*, pp. pp. 609–613.

POINCARÉ, H. 1899. *Électricité et optique: la lumière et la théorie eletrodynamique.* Paris, Gauthier-Villars.

POINCARÉ, H. 1900. Sur les rapports entre la physique experimentale et la physique mathématique. *In: Rapports présentés au Congrès international de physique de 1900*, pp. pp. 1–29.

POINCARÉ, H. 1908a. L'avenir des mathématiques. *Atti del IV Congresso internazionali dei matematici, Roma*, **1**, pp. 167–182. Trecho in (POINCARÉ, 1908c).

POINCARÉ, H. 1908b. L'Invention mathématique. *L'Enseignement mathématique*, **10**, pp. 357–371. In: (POINCARÉ, 1908c), pp. 43-57.

POINCARÉ, H. 1908c. *Science et méthode.* Paris, Flammarion.

POINCARÉ, H. 1912. Sur un théorème de géométrie. *Rendiconti dei circolo matematico di Palermo*, **33**, pp. 375–407. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.6, pp. 499-538.

POINCARÉ, H. 1918. *La science et l'hypothèse.* Paris, Flammarion.

POINCARÉ, H. 1921. Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même. *Acta Mathematica*, **38**, pp. 1–135. In: (POINCARÉ, 1951-1956), t.1, pp. i-xxxv.

POINCARÉ, H. 1951-1956. *Œuvres d'Henri Poincaré.* Paris, Gauthier-Villars. Ed. Paul Appel et al.

POINCARÉ, H. 1995. *O Valor da Ciência.* Rio de Janeiro, Contraponto.

POISSON, S.D. 1808. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*

PONT, J.-C. 1974. *La topologie algébrique des origines à Poincaré.* Paris, PUF.

PONTRYAGIN, L. S. 1978. A Short Autobiography of L. S. Pontryagin. *Russian Mathematical Surveys*, **33**(6), pp. 7–24.

PROCLUS. 1970. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Princeton, Princeton University Press.

PUGH, C. 1969. On a theorem of P. Hartman. *American Journal of Mathematics*, **91**, pp. 363–367.

RIEMANN, B. 1851. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation.* In: (RIEMANN, 1898), pp. 1-60.

RIEMANN, B. 1857. Beiträge zur Theorie der durch Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. *K. Ges. Wiss. Göttingen.* In: *Mathematische Werke*, pp.67-83.

RIEMANN, B. 1898. *Œuvres mathématiques de Riemann.* Paris, Gauthier-Villars.

ROBINSON, C. 1993. *Introduction to the Theory of Dynamical Systems.* Evanston, Northwestern Univ.

RUELLE, D. 1970. *Méthodes d'analyse globale en hydrodynamique. In:*(RUELLE, 1992). Notas de J.-P. Eckmann de um curso ministrado por Ruelle em Lausanne. pp. 1–56.

RUELLE, D. 1981. Differential Dynamical Systemas and the Problem of Turbulence. *In:* (BROWDER, 1980).

RUELLE, D. 1989. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory.* Boston, Academic Press.

RUELLE, D. 1991. *Hasard et Chaos.* Paris, Odile Jacob.

RUELLE, D. 1992. *Turbulence, Strange Attractors and Chaos.* Singapore, World Scientific.

RUELLE, D. 1993. *Acaso e Caos.* São Paulo, Editora Unesp. Tradução de (RUELLE, 1991) por Roberto Leal Ferreira.

RUELLE, D., TAKENS, F. 1971. On the Nature of Turbulence. *Commun. Math. Phys.*, **20**, pp. 167–192. In: (RUELLE, 1992), pp. 57-84.

SERRES, M. 1968. *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques.* Paris, PUF.

SERRES, M., FAROUKI, N. 1997. *Dictionnaire des Sciences Le Trésor.* Paris, Flammarion.

SHUB, M. 1969. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. Jour. Math.*, **91**, pp. 175–199.

SHUB, M. 1987. *Global Stability of Dynamical Systems.* NY, Springer-Verlag.

SIEGEL, C. L. 1952. Ueber die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Iia*, **?**, pp.21–30.

SINAI, Y. G. 1992. *L'aléatoire du non-aléatoire. In:*(DAHAN DALMEDICO *et al.*, 1992). Traduzido do russo por Simon Diner. pp. 68–87.

SMALE, S. 1960a. Morse Inequalities for a Dynamical System. *Bull. Am. Math. Soc.*, **66**, pp. 43–49.

SMALE, S. 1960b. On Dynamical Systems. *In: Proceedings of the Symposium on Ordinary Differential Equations and their Applications, Universidad nacional autónoma de México*, pp. 195–198.

SMALE, S. 1963. A Structurally Stable Differential Homeomorphism with an Infinite Number of Periodic Solutions. *Report on the Symposium on non-linear Oscillations, Kiev*, pp. 365–366.

SMALE, S. 1965. *Diffeomorphisms with Many periodic Points. In:*(STEWART & CAIRNS, 1965). pp. 63–60.

SMALE, S. 1967. Differentiable Dynamical Systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, **73**, pp. 747–817. In: (SMALE, 1980a).

SMALE, S. 1969-1970. Stability and genericity in Dynamical Systems. *Séminaire Bourbaki (Lecture Notes in Mathematics 180)*, **22**(374), pp. 1–9. Reimpresso in (SMALE, 1980a), pp. 90-94.

SMALE, S. 1980a. *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Process and Related Topics.* NY, Springer-Verlag.

SMALE, S. 1980b. *On How I Got Started in Dynamical Systems.* *In:*(SMALE, 1980a).

SMALE, S. 1998. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio. *The Mathematical Intelligencer*, **20**(1), pp. 39–44.

SMIRNOV, V. I., YOUCHKEVITCH, A. P. 1987. Correspondence de A. M. Liapunov avec H. Poincaré. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, **8**, pp. 1–18.

STERNBERG, S. 1955. On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation. *American Journal of Mathematics*, **77**, pp.526–534.

STERNBERG, S. 1957. Local contractions and a theorem of Poincaré. *American Journal of Mathematics*, **79**, pp.809–824.

STERNBERG, S. 1958. On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space II. *Amer. J. Math.*, **80**, pp.623–631.

STERNBERG, S. 1959. On the structure of local homeomorphisms, III. *Amer. J. Math.*, **81**, pp.578–604.

STEWART, S., CAIRNS, S. (Ed.). 1965. *Differential and Combinatorial Topology.* Princeton, Princeton University Press.

THOM, R. 1955-1956. Les singularités des applications différentiables. *Annales de l'Institut Fourier de Grenoble*, **6**, pp. 43–87.

THOM, R. 1956a. Les singularités des applications différentiables. *Séminaire Bourbaki*, **8**. Publicado em *Séminaire Bourbaki*, volume 3, anées 1954/1955-1955/1956, pp. 357-369, Société mathématique de France, Paris, 1995.

THOM, R. 1956b. Un lemme sur les aplications différentiables. *Bol. Soc. mat. Mexic. (II)*, **1**, pp. 59–71.

THOM, R. 1968. Sur les travaux de Stephen Smale. *Proceedings of the International Congress of Mathematiciens, Moscou, 1966*, pp. 25–28.

THOM, R. 1972. *Stabilité structurelle et morphogénèse: Essai d'une théorie générale des modèles.* Reading, Benjamin. Segunda edição Édiscience, Paris, 1977.

THOM, R. 1980a. Halte au hasard, silence au bruit. *Le Débat*, **3**, pp. 119–132.

THOM, R. 1980b. *Paraboles et catastrophes. Entretiens sur les mathématiques, la science et la philosophie.* Paris, Flammarion. Entrevista com G. Giorello e S. Morini.

THOM, R. 1986. *Prefácio a (LAPLACE, 1986).* pp. 5–27.

THOM, R. 1991. *Prédire n'est pas expliquer.* Paris, Eschel. Entrevista com Émile Noël.

THOMÉ, L. W. 1873. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, **75**, pp. 265–291.

THOMÉ, L. W. 1887. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, **101**, pp. 203–208.

THOMSON, W., TAIT, P. G. 1879-1883. *Treatise on Natural Philosophy.* 2 edn.

TODHUNTER, I. 1873. *A History of the Mathematical Theories os Attraction and the Figure of Earth, from the Time of Newton to that of Laplace.* Reimpresso em 1962 pela Dover, NY.

ULPIANO, C. 1998. *O Pensamento de Deleuze ou A Grande Aventura do Espírito.* Tese de doutorado, UNICAMP.

VAN DER POL, B. 1926. On Relaxation Oscillations. *Philosophical Magazine*, **2**, pp. 978–992.

VIANA, M. 1997. *Entrevista realizada no IMPA.*

WEIL, A. De la métaphysique aux mathématiques. *Œuvres de André Weil*, **2**, p.408.

WEYL, H. 1939. Invariants. *Duke Mathematical Journal*, **5**, pp. 489–502.

WHITNEY, H. 1955. On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. Mappings of the Plane into the Plane. *Annals of Mathematics*, **62**, pp. 379–391.

YOCCOZ, J.-C. 1987. Non-accumulation de cycles limites. *Séminaire Bourbaki*, **1987-1988**(exposé n. 690). Reimpresso em *Astérisque* 161-162, 1988, pp.87-103.

YOCCOZ, J. C. 1999. *Conférence Inauguralle. In:*(FRANCESCHELLI *et al.*, Em preparação).

ZERNER, M. 1996a. Esquisse d'une histoire de la notion de modèle mathématique. Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. *IREM de France Comté.*

ZERNER, M. 1996b. *Le double langage du modèle mathématique.*

ZERNER, M. 1997. The Mathematical Model: Epistemological Tool or Ideological Notion? *Actes du XX^e Congrès international d'Histoire des Sciences.*